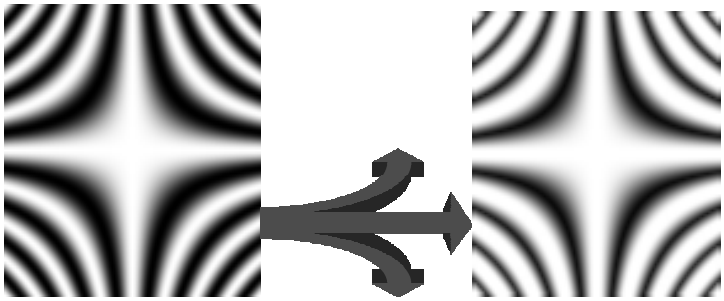
MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE



Responsable français

Professeur Françoise Preteux

Responsable roumain

Professeur Alexandre Isar

Lorsqu'on veut appliquer la géometrie et le calcul à des sujets de la physique trop compliqués, à des objets dont nous ne connaisson pas assez les propriétés pour pouvoir les mesurer, on est obligé dans tous ces cas de faire des suppositions toujours contraires à la Nature, de dépouiller le sujet de la plupart de ses qualités, d'en faire une être abstrait qui ne ressemble plus à l' être réel, et lorsqu'on a beaucoup raisonné et calculé sur les rapports et les propriétés de cet être abstrait, et qu'on est arrivé à une conclusion tout aussi arbitraire, on croit avoir trouvé quelque chose de réel, et on transporte ce résultat idéal dans le sujet réel, ce qui produit une infinité de fausses conséquences et d'erreurs.

Buffon, Histoire Naturelle,

Discours d'introduction, 1752

TABLE DE MATIERES

1.1 Qu'est-ce que la morphologie mathématique ? 1
1.2 Quelques éléments utiles de la théorie des ensembles 2
1.3 Quelques éléments utiles d'analyse fonctionnelle 4
1.4 Quelques éléments utiles de topologie 9
2 Opérateurs morphologiques de base 19
2.1 L'érosion 21
2.1.1. Propriétés mathématiques 27
2.1.2 Effets sur les images 30
2.2. La dilatation 31
2.2.1. Propriétés mathématiques 37
2.2.2. Effets sur les images 40
2.2.3. Dilatations et érosions algébriques 41
3 Opérateurs morphologiques dérivés 45
3.1 Le gradient morphologique 45
3.2 Les filtres de contraste 45
3.3 L'ouverture morphologique 46
3.4 La fermeture morphologique 49
3.4.1. Propriétés mathématiques 49
3.4.2. Effets de l'ouverture et de la fermeture sur les images 51
3.4.3. Un exemple d'utilisation de l'ouverture morphologique 51
3.4.4. Ouvertures et fermetures algébriques 53
3.4.5. Filtres morphologiques 53
3.4.5.1. Filtres alternés séquentiels 57
4. Opérateurs morphologiques de segmentation 59
4.1. Squelettes 59
4.1.1. Formule de Lantuéjoul 62
4.1.2. Squelette de l'erodé 65
4.1.3. Formule de reconstruction 66
4.1.4. Propriétés mathématiques du squelette 67
4.2. Squelette par zones d'influence 74
4.2.1. Le Skiz est un graphe 75
4.3. Ligne de partage des eaux 76
4.3.1. Approche par immersion 77
4.3.2. Ligne de partage des eaux d'une fonction régulière 78
4.3.3. L'approche métrique 80
4.3.3.1. La ligne de partage des eaux est un Skiz 81
5. Digitalisation des opérateurs morphologiques 82
5.1. Digitalisation des opérateurs 91
5.1.1. Digitalisation des opérateurs de base 91
5.1.2. Digitalisation des opérateurs de segmentation 93
5.1.2.1. Ce que l'on demande d'un algorithme digital de squeletisation 95
5.1.2.1.1. Amincissements 96
5.1.2.1.2. Algorithmes à base de files d'attente 98
5.1.2.2. La digitalisation de SKIZ 99
5.1.2.2.1. SKIZ et diagramme de Voronoi 99
5.1.2.3. La digitalisation de la l.p.e. 100
5.1.2.3.1. Notion de distance topographique 100
5.1.2.3.2. Le problème des plateaux 102
5.1.2.3.3. Quelques applications de la l.p.e. discrète 102

1.1 Qu'est-ce que la morphologie mathématique ?

La morphologie mathématique représente l'ensemble de règles mathématiques utilisées pour la description des formes.

Le concept de forme est lié étroit du concept d'image. Voilà pourquoi est recommandé d'utiliser la morphologie mathématique pour le traitement de l'image. L'interprétation d'une image, la reconnaissance de certains objets qui s'y trouvent requièrent généralement deux étapes : la première consiste à repérer sur l'image les structures intéressantes et à les isoler. C'est ce que l'on appelle la SEGMENTATION, la seconde à QUANTIFIER ces objets en leur associant des valeurs (nombres ou symboles) en vue de leur classification. Magistral élaboré par le mathématicien français G. Matheron, la morphologie mathématique a à ses fondements la théorie des ensembles, la topologie, l'analyse fonctionnelle et la théorie des probabilités. Les premiers travaux de Matheron ont analysé le cas des images binaires (seulement deux niveaux pour chaque élément d'image (pixel), "1" pour blanc et "0" pour noir). Il a introduit quelques opérateurs morphologiques de base : l'érosion, la dilatation, la fermeture, l'ouverture, et le squelette. Chaque image binaire peut être regardée comme une fonction, f, définie sur un sous-ensemble du R^2 (le support de l'image), X, à valeurs dans l'ensemble {0,1}. Cette fonction associe à chaque élément d'image la valeur 0 ou la valeur 1. Si on considère la restriction de cette fonction à l'ensemble X_1 formée par les éléments d'image ou la valeur de f est égale à 1, alors cette fonction, f_1 , décrit l'ensemble des objets de l'image f. Le complément de l'ensemble X_1 par rapport à l'ensemble X représente le fond de l'image X. Par l'application d'un opérateur morphologique à la fonction f_1 on obtient la fonction f_2. Celle-ci décrit un ensemble d'objets diffèrent. On peut donc affirmer que par l'application de l'opérateur morphologique considéré la forme des objets décrits par f_1 est modifiée. Donc les opérateurs morphologiques transforment la forme des objets de l'image. On peut observer que la fonction f_1 est la fonction indicatrice de l'ensemble X_1 :

$$(\forall)\, x \in X,\ f_1(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x \in X_1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

En conséquence, le formalisme adéqué pour la description des opérateurs morphologiques, pour les images binaires est la théorie des ensembles. Une autre catégorie d'images est celle d'images a TEINTES DE GRIS ou IMAGES NUMERIQUES. Ceux-ci peuvent être décrits par fonctions définies sur des ensembles inclus en R^2 à valeurs dans un ensemble :

$$\{n_1, n_2, \ldots, n_P\},\ n_k \in [0,1],\ k = \overline{1,P}$$

Les couleurs claires correspondent à des valeurs élevées des niveaux de gris, les couleurs sombres à des valeurs faibles. Pour décrire ces images, le cadre de la théorie des ensembles (suffisant pour les images binaires) devient insuffisant. Ce cadre doit être remplacé par le cadre de l'analyse fonctionnelle.

Mais pour toutes les catégories d'images est très important de décrire la relation (géométrique) entre les différents objets qui composent l'image considérée. Cette caractérisation géométrique ne peut être faite dans le cadre de l'analyse fonctionnelle. On a besoin d'une autre théorie. Il s'agit de la topologie.

Donc pour pouvoir apprendre la morphologie mathématique il faut étudier au commencement la théorie des ensembles, l'analyse fonctionnelle et la topologie. Voilà pourquoi on présente dans la suite les connaissances nécessaires de ces trois théories pour l'étude de la morphologie mathématique.

1.2 Quelques éléments utiles de la théorie des ensembles

Pour l'étude des objets, éléments d'une certaine image, il faut les ordonner. Pour introduire une relation d'ordre entre les objets de l'image il faut que le support de celle ci ait une structure de treillis booléen. On définit, dans la suite, cette notion. A ce but on commence par la définition du treillis.
Au commencement on définit la notion de relation d'ordre.

Définition 1. Une RELATION D'ORDRE, que l'on notera génériquement $\leq$,définie sur un ensemble E, est une relation qui vérifie :

1. $x \leq x$
2. $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
3. $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

La première est la condition de réflexivité, la seconde est la condition d'antisymetrie et la troisième est la condition de transitivité.
Tout ensemble muni d'une relation d'ordre est dit ordonné.
Soit X un sous-ensemble du ensemble E. L'élément m du E est appelé MINORANT du X si pour chaque x qui appartient à X on a :

$$m \leq x$$

L'élément M du E est appelé MAJORANT du X si pour chaque x qui appartient à X on a :

$$x \leq M$$

L'élément m est la BORNE INFERIEURE de X s'il est le plus grand des minorants de X.
L'élément M est la BORNE SUPERIEURE de X s'il est le plus petit des majorants de X.
L'ensemble X possède un élément MINIMUM a si et seulement si :

$$a \in X, \text{ pour tout } x \in X, \text{ on a : } a \leq x$$

L'élément a est dit minimal si et seulement si :

$$a \in X, \text{ et pour tout } x \in X, \ x > a$$

Tout élément minimum est donc minimal, la réciproque étant fausse.

Définition 2 Un treillis, X, est un ensemble ordonné où deux éléments x et y (pour chaque x et y dans X) possèdent en même temps une borne supérieure, notée $x \vee y$ et une borne inférieure notée $x \wedge y$. Chaque élément d'un treillis a les propriétés suivantes :
1.
1.

$$(\forall) x \in X; \ x \wedge x = x \vee x = x$$

2.

$$(\forall) x, y \in X; \ x \wedge y = y \wedge x \ \text{ et } \ x \vee y = y \vee x$$

3. Absorption

$$(\forall) x, y \in X, \ x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$$

4. Inégalités de distributivité :

$$(\forall) x, y, z \in X, \ \begin{cases} x \wedge (x \vee y) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{cases} \quad (1)$$

5. L'inégalité des modules :

$$(\forall) x, y, z, \ x \leq z \ \Rightarrow \ x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

Si les inégalités (1) deviennent des égalités alors le treillis X s'appelle treillis distributif.

Définition 3. Le treillis X est complet si :

1. L'ensemble X est ordonné,
2. Pour chaque famille (x_i) (finie ou pas) en X, il existe :
   - un le plus petit majorant $\vee x_i$, nommé sup et noté U,
   - un le plus grand minorant $\wedge x_i$, nommé inf et noté Φ.

Définition 4. On appelle complément d'un élément x d'un treillis X, qui contient Φ et U, un élément y de X, tel que :

$$x \wedge y = \Phi \quad \text{et} \quad x \vee y = U$$

Définition 5. Le treillis X sera nommée COMPLEMENTÉ, si tous ses éléments possèdent un complément.

Définition 6. Un treillis distributif et complementé est appelé treillis booléen.

Exemple. L'ensemble de parties d'un ensemble X, $\Pi(X)$, est un treillis booléen. La relation d'ordre est dans ce cas la relation d'inclusion. L'élément sup est dans ce cas l'ensemble X et l'élément inf est l'ensemble vide. L'opération $\vee$ est la réunion des ensembles et l'opération $\wedge$ est l'intersection des ensembles.

On peut parler de la dualité des opérations effectuées sur des ensembles. L'opération Ψ^* est nommé duale de l'opération Ψ si et seulement si Ψ^* agit (au même sens que Ψ) sur les complémentaires des ensembles pour lesquels Ψ est définie. Une description formelle de cette définition est:

$$\Psi^* = C \circ \Psi \circ C$$

Soit par exemple Ψ l'opıration de réunion entre les ensembles A et B.
Alors:

$$A \Psi B = A \bigcup B$$
$$A \Psi^* B = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \bigcap \overline{\overline{B}} = A \bigcap B$$

Donc l'opération duale de la réunion est l'intersection.

1.3 **Quelques éléments utiles d'analyse fonctionnelle**

S'il s'agit d'une image à P niveaux de gris alors celle-ci peut être décrite par une fonction définie sur X (le support de l'image) à valeurs dans un ensemble Y :

$$f : X \rightarrow \{n_1, n_2, \ldots, n_P\} = Y$$

Dans le cas d'ensembles de fonctions on peut parler de treillis aussi. Par exemple l'ensemble :

$$\Phi(X) = \{f : X \rightarrow Y\}$$

est ordonné par la relation :

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall)x \in X,\ f(x) \leq g(x)$$

et constitue un treillis complet ou l'inf et le sup sont donnés par les relations :

$$f = \vee f_i \Leftrightarrow f(x) = \sup\{f_i(x)\},\ (\forall)x \in X$$
$$f = \wedge f_i \Leftrightarrow f(x) = \inf\{f_i(x)\},\ (\forall)x \in X$$

On analyse dans la suite le treillis des fonctions semicontinues supérieur (scs).

Définition 1. La fonction f définie sur R^n à valeurs en R est semicontinue supérieur au point x si et seulement si pour chaque t de R avec f(x)<t, il y a un voisinage V de x, tel que, pour chaque y de V, t>f(y).

Exemples

E1. n=1, f(x)=x

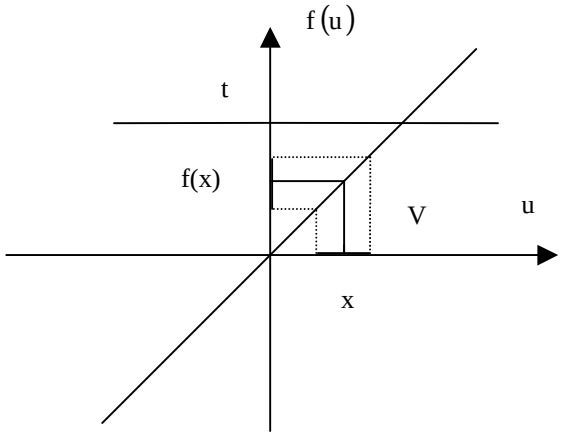


Figure 1. Le premier example de fonction semicontinue.

E2. La fonction présentée dans la figure 2.

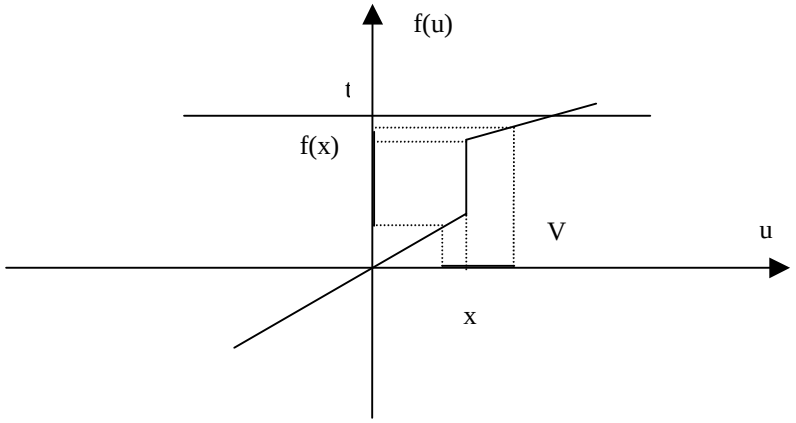


Figure 2. Le deuxième exemple de fonction semicontinue supérieure.

On peut donner une définition pareille pour les fonctions semicontinues inférieur (sci).

Définition 2. La fonction f définie sur R^n à valeurs dans R est sci, dans le point x de R^n, si et seulement si, pour chaque t de R, avec t<f(x), il y a un voisinage V de x en R^n tel que pour chaque y de V, t<f(y).

Exemple

E3. n=2; La fonction présentée dans la figure 3.

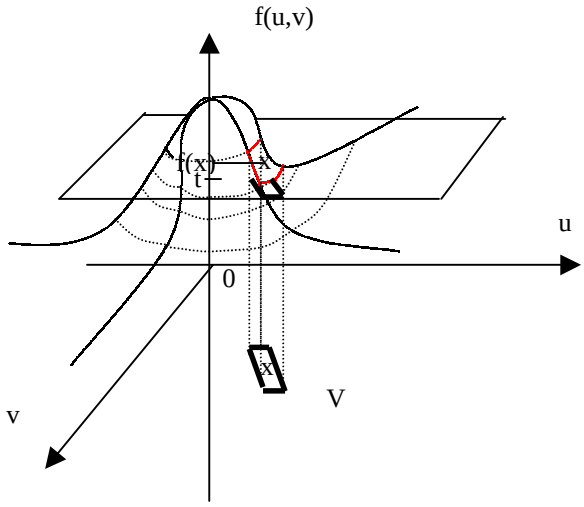


Figure 3. Un exemple de fonction semicontinue inférieur.

On dit que f est scs (ou sci) sur R^n si et seulement si elle est scs (ou sci) dans chaque point de R^n.

Soit Φ_i et Φ_s les espaces de fonctions définies sur R^n à valeurs dans R semicontinues inférieur ou supérieur. Une fonction qui est scs ou sci est appelée semicontinue. Soit Φ l'espace de fonctions semicontinues définies sur R^n à valeurs dans R. Dans [Pre.'86] est prouvée la lemme suivante:

Lemme 1. Les espaces Φ_s et Φ_i ont une structure de treillis.

Donc on a les propriétés:

P11. Φ_s et Φ_i sont ordonnés par la relation $\leq$ définie par:

$$f' \leq f \Leftrightarrow (\forall) x \in R^n, f'(x) \leq f(x)$$

P12.

$$(\forall)(f_i)_{i\in I} \subset \Phi_s \Rightarrow \bigwedge_{i\in I} f_i \in \Phi_s \text{ et } \bigvee_{i\in I} f_i \in \Phi_s$$

$$(\forall)(f_i)_{i\in I} \subset \Phi_i \Rightarrow \bigwedge_{i\in I} f_i \quad et \quad \bigvee_{i\in I} f_i \in \Phi_i$$

$$(\forall)(f_i)_{i\in I} \subset \Phi_s \Rightarrow \inf_{i\in I} (f_i) \in \Phi_s$$

A chaque fonction scs f on peut associer la région située sous le graphe de la fonction. Cette région est appelée sougraphe et est définie par la relation:

$$SG(f) = \{(x,t) \in R^n \times R,\ f(x) > t\}$$

Exemple. Soit f la fonction présentée dans la figure 1. On présente dans la figure 4 l'ensemble SG(f).

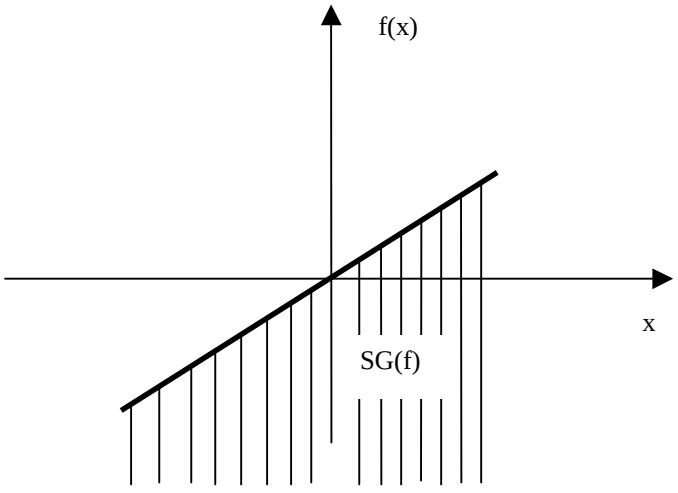


Figure 4. La fonction f et son sougraphe.

On peut démontrer la proposition suivante:

L'ensemble SG(f) est fermé si et seulement si la fonction f est scs.

A l'aide du sougraphe on peut introduire une nouvelle relation d'ordre sur le treillis $\Phi_s(R^n)$:

$$f \le g \Leftrightarrow SG(f) \subset SG(g)$$

Cette relation d'ordre induit-elle aussi une structure de treillis sur l'espace Φ_s, plus proche de la structure de treillis booléen. Les éléments sup et inf de ce treillis sont donnes par les relations:

$$f = \vee_i f_i \Leftrightarrow SG(f) = \overline{\bigcup_i SG(f_i)}$$

$$f = \wedge_i f_i \Leftrightarrow SG(f) = \bigcap_i SG(f_i)$$

Ainsi le treillis de fonctions Φ_s a été réduit à un treillis d'ensembles.
Soit f une fonction définie sur R^n qui prenne des valeurs dans R. On appelle régularisée supérieure de f la plus petite majorante s.c.s de f:

$$\bar{f} = \inf\{g \mid g \in \Phi_S \text{ et } f \le g\}$$

On appelle regularisée inferieure de f la plus grande minorante s.c.i de f:

$$\underline{f} = \sup\{g \mid g \in \Phi_i \text{ et } g \le f\}$$

Le concept de dualité peut être introduit aussi dans le cadre fonctionnel. L'opérateur dual de l'opérateur Ψ peut être définit comme suit:

$$(\forall) f \in \Phi, \Psi^*(f) = -\Psi(-f)$$

Présentons deux exemples.

E1. Cherchons par exemple l'opérateur dual de l'opérateur $\wedge$.

$$(\forall) x \in R^n, \left(f \wedge^* g\right)(x) = -(-f \wedge (-g))(x) = -\min\{(-f),(-g)\}(x)$$

Si:

$$f(x) \le g(x)$$

alors:

$$-f(x) \ge -g(x), \Rightarrow \min\{(-f),(-g)\}(x) = -g(x)$$

et:

$$-\min\{(-f),(-g)\}(x) = g(x) = \max\{f(x), g(x)\} = (f \vee g)(x)$$

Si:

$$f(x) \ge g(x)$$

alors:

$$-f(x) \le -g(x), \Rightarrow \min\{(-f),(-g)\}(x) = -f(x); -\min\{(-f),(-g)\}(x) = f(x) = \max\{f(x), g(x)\} = (f \vee g)(x)$$

On a montré ainsi que:

$$(\wedge)^* = \vee$$

E2.

On considère l'opérateur:

$$\Psi(f) = -f$$

Alors:

$$\Psi^*(f)(x) = -\Psi(-f)(x) = -(f)(x) = \Psi(f)(x)$$

Donc:

$$\Psi^* = \Psi$$

Un tel opérateur s'appelle autodual.
Dans [Pre.'86] est démontrée la proposition suivante:

Soit Ψ un opırateur définit sur Φ, à valeurs dans Φ, tel que:

$$\Psi(\Phi_s) \subset \Phi_s \text{ et } \Psi(\Phi_i) \subset \Phi_i$$

Alors:

- *si Ψ est continu alors Ψ^* est continu,*
- *si Ψ est s.c.s alors Ψ^* est s.c.s,*
- *si Ψ est s.c.i alors Ψ^* est s.c.i.*

1.4. **Quelques éléments utiles de topologie**

On présente dans la suite quelques éléments de topologie qui seront utiles à l'introduction des opérateurs de la morphologie mathématique. On commence avec la topologie de R^n et on finit avec la topologie des espaces fonctionnels.

1.4.1. Topologie de la droite R

Définition 1. On dit qu'un sous-ensemble A de R est OUVERT s'il est vide ou si, pour tout x de A il existe un intervalle ouvert contenant x et contenu dans A.

De cette définition résultent les conséquences presque immédiates suivantes:
O1. Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte.
O2. Toute intersection finie d'ouverts est ouverte;
O3. La droite R et l'ensemble vide sont des ouverts.

Définition 2. On dit qu'un sous-ensemble A de R est fermé lorsque son complémentaire $C_R A$ est ouvert.

Les conséquences correspondantes sont:
F1. Toute intersection de fermés est fermée
F2. Toute réunion finie de fermés est fermée,
F3. La droite R et l'ensemble vide sont des ensembles fermés.

Définition 3. Si A est un sous-ensemble de R, un point x_0 de R est dit POINT D'ACCUMULATION de A si dans tout voisinage de x_0 il existe du moins un point de A autre que x_0.

Définition 4. Un point ISOLÉ d'un ensemble A est un point x de A qui n'est pas point d'accumulation de A. Autrement dit, c'est un point x de A qui possède un voisinage V tel que:

$$A \cap V = \{x\}$$

Définition 5. On dit qu'une partie non-vide A de R est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, autrement dit si A est contenu dans un intervalle ferme [a,b].

Définition 6. On appelle RECOUVREMENT OUVERT d'un ensemble A de la droite tout recouvrement de A par des ensembles ouverts de R.

En utilisant les définitions déjà présentées on peut énoncer à la fin de ce paragraphe deux théorèmes très importants de topologie.

Théorème 1 (de Heine-Borel-Lebesgue) De tout recouvrement ouvert d'un intervalle fermé borné [a,b] on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini.

La preuve est présentée dans [Cho.'92].

Théorème 2 (de Bolzano-Weierstrass) Pour tout intervalle fermé borné [a,b] tout sous-ensemble infini X a un point d'accumulation sur [a,b].

1.4.2. Topologie de l'espace R^n

Définition 1. Soit ω_i (i=1,2,…,n) un ouvert de R qui soit, ou bien un intervalle ouvert (a_i, b_i), ou bien l'ensemble vide. Dans R^n, on appelle PAVÉ OUVERT de bases $?_{i,}$ le sous-ensemble $\omega_1 \times \omega_2 \times \ldots \omega_n$ de R^n (il est vide si l'une des bases est vide); lorsqu'il n'est pas vide, son centre est le point de cordonnées:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

L'intersection de deux pavés ouverts de bases (ω_i), (ω_i') est le pavé ouvert de base $(\omega_i \cap \omega_i')$. On définirait de façon analogue les pavés fermés en remplaçant les intervalles ω_i ouverts par des intervalles fermés.

Définition 2. Dans R^n, on dit qu'un ensemble V est voisinage d'un point x s'il contient un ensemble ouvert contenant x; on dit qu'un point x est point d'accumulation d'un ensemble A si dans tout voisinage de x il existe au moins un point de A autre que x.

Nous pourrions étudier ici en détail les conséquences de ces définitions, comme nous l'avons fait pour R. Mais dès maintenant il est plus instructif de faire cette étude dans un cadre plus général. Toutefois il sera bon d'avoir toujours présents à l'esprit les cas particuliers plus concrets que constituent la droite réelle R, les espaces R^n et leurs sous-ensembles.

1.4.3. Espaces topologiques

Dans l'étude élémentaire de R et de R^n qu'on vient de faire, presque toutes les notions ont été définies à partir des ouverts, et la plupart des propriétés ont été obtenus en n'utilisant que les propriétés fondamentales de ces ouverts. D'où l'idée de fonder la topologie sur la notion d'ensemble ouvert; on va tenter d'exprimer toutes les notions topologiques classiques, telles que limite et continuité, en termes d'ouverts, et de retrouver le plus possible des théorèmes classiques à partir de quelques hypothèses simples sur l'ensemble de ces ouverts.

Définition 1. On appelle ESPACE TOPOLOGIQUE tout couple constitué par un ensemble E et un ensemble Π {E} de parties de E appelées ENSEMBLES OUVERTS (ou abrégé OUVERTS) et satisfaisant aux trois propriétés suivantes:

O1. Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte;
O2. Toute intersection finie d'ouverts est ouverte;
O3. L'ensemble E et l'ensemble vide sont ouverts.

On dit encore que l'ensemble Π {E} de parties de E définie sur E une topologie.
Voici que l'ensemble de parties de E, Π {E}est en même temps un treillis booléen (voir l'exemple après la définition 6 du paragraphe 2). Mais, comme nous l'avons déjà dit, les objets d'une image peuvent être décrits comme des éléments de l'ensemble de parties du

support de l'image. Voilà pourquoi ont peut considérer cette collection d'objets comme un treillis booléen et en même temps comme une topologie. Le modèle de treillis booléen est utile quand il s'agit des transformations de l'image basées sur les opérations booléennes effectuées sur les objets de l'image (réunion, intersection,…). Le modèle topologique est utile quand il s'agit des transformations géométriques de l'image. Les transformations de l'image basées sur les opérations booléennes sont décrites à l'aide des opérateurs sur les treillis. Il s'agit d'applications définies sur les treillis. On appelle ces applications des opérateurs parce que les opérations booléennes sur les éléments du treillis peuvent être considérées comme des fonctions. Donc l'application est définie sur un espace de fonctions. Ces applications transforment les ensembles (éléments du treillis) en autres ensembles. Soit E un treillis complet et soit Ψ un opérateur définit sur E. On dit que l'opérateur Ψ est croissant si:

$$(\forall)x, y \in E, x \le y \Rightarrow \Psi(x) \le \Psi(y)$$

On dit que l'opérateur Ψ est extensif (ou anti-extensif) si:

$$(\forall)x \in E, x \le \Psi(x) \quad (ou \quad x \ge \Psi(x))$$

On dit que l'opérateur Ψ est idempotent si:

$$(\forall)x \in E,\ \Psi(x) = \Psi(\Psi(x))$$

Soit E un treillis complet et soit Ψ un opurateur croissant sur E. Pour toute famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments d'E on a:

et:

$$\Psi\left(\vee_i x_i\right) \ge \vee_i (\Psi(x_i))$$

$$\Psi\left(\wedge_i x_i\right) \le \wedge_i \Psi(x_i)$$

On dit qu'un ensemble X inclus dans E est fermé pour l'opérateur Ψ ou Ψ-fermé si :

$$(\forall)x \in X \Rightarrow \Psi(x) \in X$$

L'ensemble des opérateurs croissants sur le treillis E est lui-même un treillis pour la relation d'ordre:

$$\Phi \le \Psi \Leftrightarrow (\forall)x \in E, \Phi(x) \le \Psi(x)$$

Le sup est alors donné par:

$$\left(\vee_i \Phi_i\right)(x) = \vee_i (\Phi_i(x))$$

Sur tout ensemble E on peut définir plusieurs topologies, sauf lorsque E contient au plus un point. L'une d'elle est la topologie discrète; c'est celle pour laquelle ?{E} est

l'ensemble de toutes les parties de E. C'est la topologie sur E qui comporte le plus d'ouverts possible. Une autre est la topologie grossière; c'est celle pour laquelle $\Pi\{E\}$ ne contient que deux éléments: l'ensemble vide et E. C'est la topologie sur E qui comporte le moins d'ouverts possible.

Mais les topologies intéressantes ne sont en général, ni discrètes, ni grossières. On remarquera que les propriétés O_1 O_2 et O_3 sont celles que nous avons mises en évidence dans l'étude de la topologie de la droite. Il est remarquable qu'elles suffisent à obtenir des énoncés très riches.

Définition 2. On dit qu'un sous-ensemble A de E est FERMÉ lorsque son complémentaire est ouvert.

Il résulte immédiatement des énoncés O_1 O_2 et O_3 trois énoncés F_1 ,F_2 ,F_3 équivalents aux précédents par dualité et concernant les fermés de E:

F_1 Toute intersection (finie ou non) de fermés est fermée;
F_2 Toute réunion finie de fermés est fermée;
F_3 L'ensemble vide et l'ensemble E sont fermés.

Définition 3. On appelle VOISINAGE d'un point x de E tout sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x.

Voici quelques propriétés essentielles des voisinages:

V_1 Tout voisinage de x contient x et tout x a au moins un voisinage.
V_2 Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x;
V_3 L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x;
V_4 Si V est un voisinage de x, il existe un sous-voisinage W de x (c'est-à-dire que $W \subset V$) tel que V soit un voisinage de chaque point de W.

On désigne par *V(x)* l'ensemble des voisinages V de x.
On appelle VOISINAGE D'UNE PARTIE A DE E tout sous-ensemble de E contenant A.

Définition 4. On dit qu'une partie *B* de *V(x)* constitue UNE BASE DE *V(x)* si tout V appartenant à *V(x)* contient un élément W qui appartient à *B*.
Définition 5. Soit A une partie de E et soit x un point de E. On dit que x est ADHERENT à A si tout voisinage de x contient un point de A. On dit que x est POINT D'ACCUMULATION de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x. On dit que x est POINT ISOLÉ de A s'il appartient à A, mais n'en est pas un point d'accumulation, autrement dit s'il existe un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de A que x.
Définition 6. On appelle FERMETURE de A, $\bar{A}$, le plus petit ensemble fermé de E contenant A.
Corollaire.

1. La relation $A=\bar{A}$ caractérise les ensembles fermés;
2. Pour que A soit fermé il fallait et il suffit qu'il contienne ses points d'accumulation.

$$C\left\{C\left\{C\left\{\overset{\circ}{A}\right\}\right\}\right\} = C\left\{\overline{A}\right\}$$

La notion duale de celle de fermeture est celle d'intérieur.

Définition 7. On appelle INTERIEUR d'un sous-ensemble A de E, la reunion, eventuelement vide, de tous les ouverts contenus dans A. C'est donc le plus grand des ouverts contenus dans A; on le note Å.

Il est immédiat que la relation A=Å caractérise les ouverts.

On présente dans la suite quelques relations entre les opérations topologiques Å, $\bar{A}$ et les opérations élémentaires.

1. Dualité entre fermeture et intérieur:

1)

$$C\left\{\overset{\circ}{A}\right\} = \overline{C\{A\}} \qquad (1)$$

Preuve. Soit ω_i un ouvert contenu dans A. Alors après la définition 7, on peut écrire:

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i\in I} \omega_i$$

ou:

$$C\overset{\circ}{A} = C\left\{\bigcup_{i\in I} \omega_i\right\} \overset{\text{De Morgan}}{=} \bigcap_{i\in I} C\{\omega_i\}$$

Soit:

$$\phi_i = C\{\omega_i\}$$

On constate que φ_i est un fermé. Mais:

$$\omega_i \subset A \Rightarrow C\{\omega_i\} \supset C\{A\}$$

Donc $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ désigne la famille des fermés contenant C{A}. Voilà pourquoi conformément à la définition 6, l'intersection des f_i représente la fermeture de C{A}. Donc la relation (1) est vraie.

2)

$$C\left\{\overline{A}\right\} = \left(C\left\{\overset{\circ}{A}\right\}\right)$$

Cette formule se déduit de la précédente en y remplacent A par C{A}. En effet:

$$C\left\{C\left\{\overset{\circ}{A}\right\}\right\} = \overline{C\{C\{A\}\}} = \overline{A}$$

d'où:

$$\left(C\left\{\overset{\circ}{A}\right\}\right) = C\left\{\overline{A}\right\} \qquad (2)$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Propriétés de la fermeture:

1) $$\overline{\phi} = \phi$$

2) $$A \subset \overline{A}$$

3) $$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

4) $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Preuves.
Grâce à la propriété F3, l'ensemble vide est un fermé.

La propriété 1 est donc vérifiée. $\overline{\phi} = \phi$
Garce à la définition de la fermeture (définition 6) la fermeture de A contient A. Donc:

$$A \subset \overline{A}$$

La propriété 2 est donc vérifiée. Grâce au corollaire déjà présenté, parque $\bar{A}$ est un ensemble fermé on peut écrire:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

La propriété 3 est vérifié-t-elle aussi.

Pour démontrer la quatrième propriété observons que:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (3)$$

et que $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un ensemble fermé. Mais, grâce à la définition 6, le plus petit ensemble fermé contenant A∪B est:

$$\overline{A \cup B}$$

Voilà pourquoi on peut écrire:

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

Réciproquement, si:

$$X \subset Y \Rightarrow X \subset \overline{Y}$$

ou $\overline{Y}$ est un ensemble fermé.
Mais le plus petit ensemble fermé qui contient X est:

Donc: $$\overline{X}$$

$$\overline{X} \subset \overline{Y}$$

Soit X l'ensemble A ou l'ensemble B et Y l'ensemble A∪B. En vertu de la relation précédente on peut écrire:

$$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$$

et:

$$\overline{B} \subset \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$$

d'où:

$$\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} \qquad (4)$$

Les relations (3) et (4) prouvent la propriété 4). Cette propriété importante s'étend évidemment à toute réunion finie. Par contre elle ne s'étend pas aux réunions infinies à cause du fait qu'une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours un fermé.
On n'a pas non plus de relation analogue pour l'intersection, même finie.

3. Propriétés de l'intérieur Elles sont duales aux propriétés de la fermeture:

1)

$$\overset{\circ}{\mathrm{E}} = \mathrm{E}$$

2)

$$\overset{\circ}{A} \subset A$$

3)

$$\left(A \overset{\circ}{\cap} B\right) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{\mathrm{B}}$$

4)

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$$

Ces propriétés peuvent etre démontrées à l'aide des propriétés de la fermeture.
Par exemple:

$$\overline{\Phi} = \Phi \Rightarrow \underset{E}{\mathrm{C}}\left\{\overline{\Phi}\right\} = \underset{\mathrm{E}}{\mathrm{C}}\{\Phi\} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\underset{\mathrm{E}}{\mathrm{C}}\left\{\overset{\circ}{\Phi}\right\}\right) = E$$

donc:

$$\overset{\circ}{E} = E$$

ce qu'il fallait demontré.

Définition 8. La frontière A^* d'un sous-ensemble A de E est l'ensemble des points x dont tout voisinage V contient au moins un point de A et un point de C{A}.

On a donc:

$$\mathrm{A}^* = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{C}\{\mathrm{A}\}}$$

Sur cette formule on voit que la frontière de tout ensemble est fermée et que deux ensembles complémentaires ont même frontière.

Proposition 1. Pour toute partie A de E on a :

$$\mathrm{A}^* = \overline{\mathrm{A}} - \overset{\circ}{\mathrm{A}}$$

Preuve.

$$\left.\begin{array}{l} A^* = \overline{A} \cap \overline{C\{A\}} \\ \text{Mais } \overline{C\{A\}} \underset{(1)}{=} C\left\{\overset{\circ}{A}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = \overline{A} \cap C\left\{\overset{\circ}{A}\right\} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$$

(c.q.f.d).

Définition 9. Soit A un sous-ensemble d'un espace E. On dit que A est PARTOUT DENSE sur E, DENSE sur E, ou NON-DENSE sur E suivant que:

$$\overline{A} = E;\ \overline{A} \text{ a son interieur non vide, } \overline{A} \text{ a son interieur vide.}$$

Définition 10. On dit que l'espace E est séparable si celui-ci contient un sous-ensemble dénombrable partout dense.

Définition 11. On dit qu'un espace E est séparé lorsque deux points distincts quelconques de E possèdent deux voisinages disjoints.

Les espaces les plus utiles sont toujours sépares; par exemple la droite R est séparée. Dans un espace séparé, l'intersection des voisinages fermés d'un point a est réduite à ce point. En effet, pour tout b≠a il existe deux ouverts disjoints ω_a et ω_b contenant respectivement a et b, donc C{ ω_b } est un voisinage fermé de a ne contenant pas b. En particulier tout ensemble {a} est ferme puisqu'il est l'intersection de ses voisinages fermés.

Définition 12. On dit qu'un espace E est COMPACT s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Il existe de nombreux espaces qui, sans être compacts, se comportent localement comme un espace compact; c'est le cas de R par exemple. De façon précise:

Definition 13. On appelle espace LOCALEMENT COMPACT tout espace séparé E dont tout point possède au moins un voisinage compact.

Exemples.

1. Tout espace compact est localement compact.
2. Tout espace topologique discret est localement compact (exemple Z).
3. La droite R est localement compacte; en effet, d'abord R est séparée; ensuite, pour tout x appartenant à R il existe a et b appartenant à R tels que a<x<b et [a,b] est un voisinage compact de x. R n'est pas compacte.
4. Le sous-espace Q de R n'est ni compact, ni localement compact; en effet, supposons par exemple que O possède dans Q un voisinage compact V; le voisinage V de O contient un sous-voisinage de la forme Q∩[-a,a]; comme ce dernier est fermé dans Q, l'ensemble A= Q∩[-a,a] serait alors compact; or ceci est manifestement faux puisque, pour tout irrationnel x dans [-a,a] la suite décroissante des fermés A∩[x-1/n,x+1/n] a une intersection vide.

Définition 14. On dit qu'un espace topologique E est CONNEXE s'il n'existe aucune partition de E en deux parties fermées non vides.

1.4.4. La topologie en TOUT ou RIEN

Soit E un espace localement compact séparable. Par exemple E peut être R^n. Soit *F* l'ensemble de fermés du E et *G* l'ensemble des ouverts du E. On partage les éléments du *F* en ensembles fermes et compactes F^K (on utilise K pour spécifier le caractère compact de l'ensemble considéré). Cette partition induit sur *F* la topologie en tout ou rien.

Définition 1. On appelle TOPOLOGIE EN TOUT OU RIEN sur *F*, notée T_f, la topologie engendrée par les deux familles F^K, $K \in K$ et $G \in G$.

Dans [Pre.'86] est démontrée la proposition suivante:

Proposition 1. L'espace *F* muni de la topologie T_f est compact séparable.

On peut parler de différentes propriétés différentielles sur les topologies parce qu'on peut définir la convergence dans ce cas.

Définition 2. Une suite d'ensembles $(F_n)_n$ converge vers l'ensemble F dans (F,T_f) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. Si un ouvert G intersecte F, il intersecte tous les F_n , sauf un nombre fini d'entre eux;
2. Si un compact K est disjoint de F, il est disjoint de tous les F_n sauf d'un nombre fini d'entre eux.

La condition 1 définie la "convergence inferieure". On utilise la notation:

$$\underline{\lim}\,(F_n) = F_0$$

La condition 2 définie la notion de convergence superieure. On note:

$$\overline{\lim}\,(F_n) = F$$

Exemple. Soit, dans *F*, la suite $(F_n)_n$ definie par:

$$(\forall) n \in N,\ F_{2n} = \{(x,0)\},\ F_{2n+1} = \{(0,y)\};\ (x,0) \in E;\ (0,y) \in E;\ x \neq y$$

On constate que:

$$\underline{\lim}\, F_n = \Phi$$

Parce qu'il existe des ouverts G disjoints qui ont des intersections non vides avec les ensembles F_{2n} et des intersections vides avec les ensembles F_{2n+1}. En même temps on peut écrire:

$$\overline{\lim}\, F_n = \{x, y\}$$

En effet, soit le compact K tel que:

$$K \cap \{(x, y)\} = \Phi$$

Aucun point d'abscisse x et d'ordonnée y n'appartient pas à K.
Donc:

$$K \cap \{(x,0)\} = \Phi;\ K \cap \{(0, y)\} = \Phi$$

On peut affirmer que K est disjoint de n'importe quel élément de la suite F_n, et la valeur de la limite superieure est en effet {(x,y)}.
Pour vérifier la convergence d'une certaine suite d'ensembles on peut utiliser le théorème suivant:

Théorème 1. La suite $(F_n)_n$ converge vers F dans (F,T_f) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1'. Pour chaque x, élément de l'ensemble F, il existe un seuil, nombre naturel, N(x), tel que pour chaque n plus grand que N(x), dans chaque ensemble F_n il existe un élément x_n qui appartient à une suite $(x_n)_n$ convergent vers x.

2'. Pour chaque sous-suite de $(F_n)_n$, $(F_{nk})_k$ il existe une sous-suite $(x_{nk})_k$ tel que $x_{nk} \in F_{nk}$ et la limite de la $(x_{nk})_k$ appartient à F.

Les conditions 1 et 1' (2 et 2') sont équivalentes et correspondent à la définition de la $\underline{\lim}$ $(\overline{\lim})$

Maintenant on peut parler de la continuité des fonctions d'ensemble. Soit O un espace séparable et Ψ une application de Ω dans *F*. Les éléments de O sont des ensembles. Donc Ψ est une fonction d'ensemble. Elle met en correspondance chaque ensemble ω, ιlément de O avec un autre ensemble Ψ(ω), ιlément de *F*. On présente dans la suite les conditions pour la semicontinuité de telles applications.

Proposition 2. La fonction Ψ est s.c.s si et seulement si pour tout ω de Ω et pour tout suite $(\omega_n)_n$ convergente vers ω dans Ω, on a:

$$\overline{\lim}\, \Psi(\omega_n) \subset \Psi(\omega)$$

Proposition 3. La fonction Ψ est s.c.i. si et seulement si pour tout ω de Ω et pour tout suite $(\omega_n)_n$ convergente vers ω dans Ω, on a:

$$\Psi(\omega) \subset \underline{\lim}\, \Psi(\omega_n)$$

Exemples

E1. $E=R^2$, l'intersection est s.c.s sur (F,T_f).

E2. E=R, la complémentation est s.c.i. sur (F,T_f).

Ces fonctions d'ensemble, définies sur des espaces topologiques peuvent être regardées (comme on l'a déjà vu dans le cas de treillis) comme des opérateurs. Le motif est que l'ensemble de parties d'un ensemble E, Π(E), peut être regardé comme une topologie ou comme un treillis booléen, en même temps. Ici prend fin cette présentation succincte des outils mathématiques qui se trouvent à la base de l'étude de la morphologie mathématique.

2. Opérateurs morphologiques de base

Le cas le plus simple est celui d'images binaires. Celles-ci sont décrites à l'aide de la théorie des ensembles. On présente, dans la suite, les principaux opérateurs morphologiques utilisés pour le traitement et l'analyse des images binaires. Pour la construction de ces opérateurs on utilise des ensembles spécifiques appelés ELEMENTS STRUCTURANTS. Il y a une famille d'éléments structurants utilisés pour le traitement morphologique de l'image. L'effet de l'application d'un certain opérateur morphologique pour le traitement d'une image donnée dépende de l'élément structurant utilisé pour le traitement. On notera, dans la suite, l'élément structurant avec K. Une opération souvent utilisée pour la construction des opérateurs morphologiques est la soustraction de Minkovski.

On appelle le symétrique de l'ensemble K: $K = \left\{x \in R^n\right\}$ et on le note $\breve{K}$ l'ensemble:

$$\breve{K} = \left\{-x \in R^n \,\middle|\, x \in K\right\}$$

On appelle la différence de Minkovski des ensembles A et K, et on la note avec $A \div K$, l'ensemble:

$$A \div K = \left\{x \in R^n \middle| K_x \subset A\right\} \text{et } K_x = \left\{x + k \middle| k \in K\right\}$$

Exemples

E1. Soit n=1; A=[-a, a]; K=[-ε, ε], avec $\varepsilon << a$. Les ensembles A et K sont présentés dans la figure 2.1.

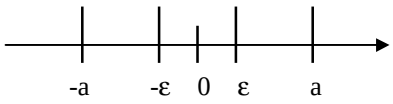


Figure 2.1. Les ensembles impliqués dans l'exemple E1.

Si: $-a \le -\varepsilon + x, \text{alors } K_x \subset A$,

Si: $a \ge \varepsilon + x, \text{alors } K_x \subset A$.

Donc: $A \div K = \left[-a + \varepsilon, a - \varepsilon\right]$

E2. Soit n=2; A=[-a, a]×[-a, a] ; K=[-ε, ε] ×[-ε, ε], ε<<a.

Ces ensembles sont présentés dans la figure 2.2.

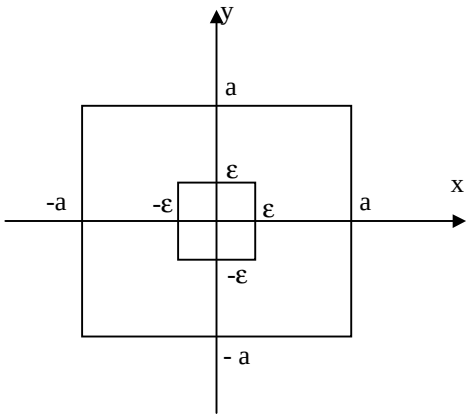


Figure 2.2 Les ensembles considérés dans l'exemple E2.

Si:

$$\begin{cases} -a \le -\varepsilon + x \\ -a \le -\varepsilon + y \end{cases} \text{ alors } K_{x,y} \subset A$$

Si:

$$\begin{cases} a \ge \varepsilon + x \\ a \ge \varepsilon + y \end{cases} \text{ alors } K_{x,y} \subset A$$

Donc:

$$A \div K = \{-a + \varepsilon \le x \le a - \varepsilon, -a + \varepsilon \le y \le a - \varepsilon\}$$

L'ensemble $A \div K$ est présenté dans la figure 2.3.

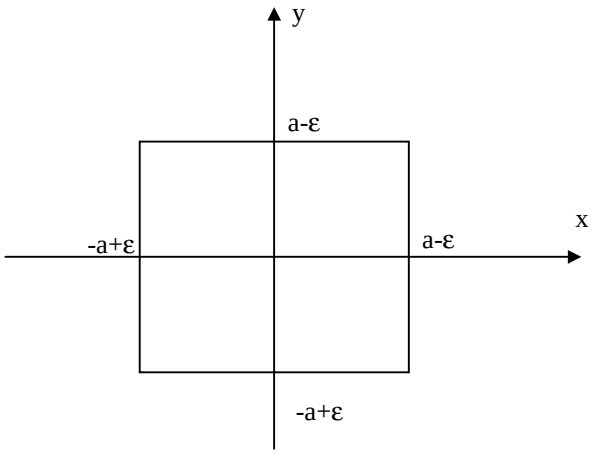


Figure 2.3. Le résultat de l'opération présentée dans l'exemple 2.

2.1. L'érosion

Le premier opérateur morphologique est celui d'érosion. L'érodé de l'ensemble A par l'élément structurant K est la différence de Minkovski entre A et $\breve{K}$. On note:

$$E_K\{A\} = A \div \breve{K} = \left\{x \in R^n \middle| K_x \subset A\right\} \qquad (1)$$

Si on répète les exemples 1 et 2 pour calculer les érodés on obtient les mêmes résultats parce que dans ces cas les ensembles K sont symétriques:

$$\breve{K} = K$$

Si on regarde les résultats obtenus dans les exemples 1 et 2 on constate que les ensembles résultats sont inclus dans les ensembles A. Voilà pourquoi on appelle cet opérateur érosion. Le résultat de l'érosion dépende de la forme de l'élément structurant. Prenons de nouveau l'exemple E2, mais considérons, cette fois ci, l'élément structurant présenté dans la figure 2.4.

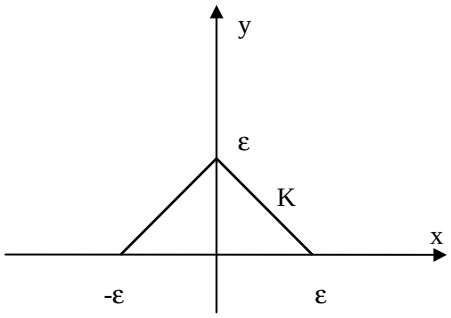


Figure 2.4. Le nouvel élément structurant.

La description analytique de cet ensemble est:

$$K = \left\{\left|x\right| \le \varepsilon, y + \left|x\right| \le \varepsilon\right\}$$

Donc son symétrique est:

$$\breve{K} = \left\{\left|x\right| \le \varepsilon, -y + \left|x\right| \le \varepsilon\right\}$$

représenté dans la figure 2.5.

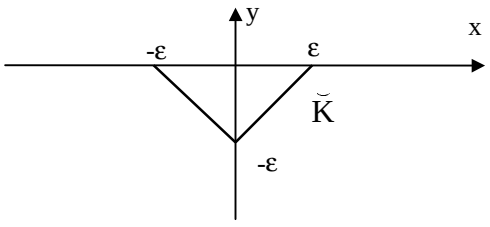


Figure 2.5. Le symétrique de l'élément structurant.

L'érodé de l'ensemble A (dans l'exemple E2) à l'aide de l'élément structurant K (dans la figure 2.4) est calculé dans la suite.

Si:

$$\left.\begin{array}{c} -a \le -\varepsilon + x \\ -a \le -\varepsilon + y \\ y < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \breve{K}_x \subset A$$

Si:

$$\left.\begin{array}{c} a \ge \varepsilon + x \\ -a \le -\varepsilon + y \\ y < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \breve{K}_x \subset A$$

Si:

$$\left.\begin{array}{c} a \ge y \\ -a \le -\varepsilon + x \\ y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \breve{K}_x \subset A$$

Si:

$$\left.\begin{array}{c} a \ge \varepsilon + x \\ a \ge y \\ y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \breve{K}_x \subset A$$

Le résultat est présenté dans la figure 2.6.

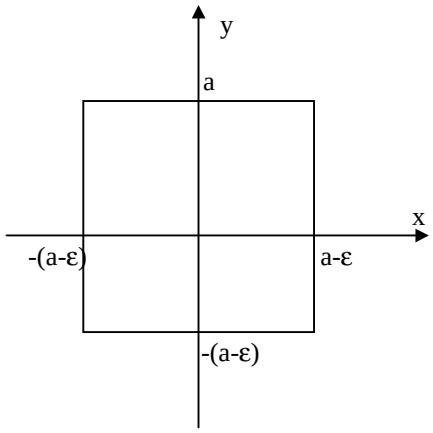


Figure 2.6. L'érodé d'un rectangle. On a utilisé comme élément structurant un triangle.

Tenant compte de sa définition ensembliste (voir la relation (1)) on peut affirmer que l'opérateur d'érosion peut être utilisé pour le traitement des images binaires.

Comme nous l'avons déjà montré, dans le paragraphe 3 du premier chapitre, pour le traitement des images à plusieurs niveaux de gris on utilise l'analyse fonctionnelle. Parmi les outiles de cette analyse il y a le sous-graph. Soit f et g deux fonctions définies sur R^n, semicontinues. Leurs pseudo-soustraction de Minkovski est notée par $f \div g$ et est la fonction:

$$(\forall)x \in R^n,\ (f \div g)(x) = \inf\left\{f(y) - g(x-y) \middle| y \in R^n\right\}$$

On appelle érosion morphologique de la fonction f par élément structurant g, la pseudo-soustraction de Minkovski de f par la fonction $\breve{g}$ où:

$$(\forall)x \in R^n, \breve{g}(x) = g(-x)$$

Donc:

$$E_g\{f\}(x) = (f \div \breve{g})(x) = \inf\left\{f(y) - g(y-x) \middle| y \in R^n\right\}$$

Calculons le sous-graph du $E_g\{f\}(x)$:

$$SG(E_g\{f\}) = \left\{(x,t) \in R^n \times R, E_g\{f\}(x) > t\right\}$$

Mais la relation:

$$E_g\{f\}(x) > t$$

est équivalente à la relation suivante:

$$\inf\left\{f(y) - g(y-x) \middle| y \in R^n\right\} > t$$

Donc, pour chaque y de R^n on a:

$$f(y) - g(y-x) > t$$

ou:

$$f(y) > t + g(y-x) \qquad (2)$$

Mais, g(y-x) représente la translatée de la fonction g(y) avec la quantité x, et t+g(y-x) est la fonction dont le graphe est obtenu par translation verticale du graphe de la fonction g(y-x) avec la quantité t. Soit:

$$g_{(x,t)}(y) = t + g(y-x)$$

La condition (2) est équivalente à la condition:

$$SG(g_{(x,t)}) \subset SG(f)$$

Voilà pourquoi on peut écrire:

$$SG(E_g\{f\}) = \left\{(x,t) \in R^n \times R, SG(g_{(x,t)}) \subset SG(f)\right\} \qquad (3)$$

Si on compare les relations (1) et (3) on constate leurs ressemblance formelle.

$$K_x \leftrightarrow SG(g_{(x,t)})$$

$$A \leftrightarrow SG(f)$$

Cette ressemblance formelle justifie la définition de l'érosion morphologique qu'on a donnée. La relation (3) nous donne un outil pour le calcul de l'erodée morphologique d'une fonction. L'exemple suivant nous présente le mode d'emploi de cet outil.

E3. Pour n=1, soit f(x) la fonction avec la représentation graphique:

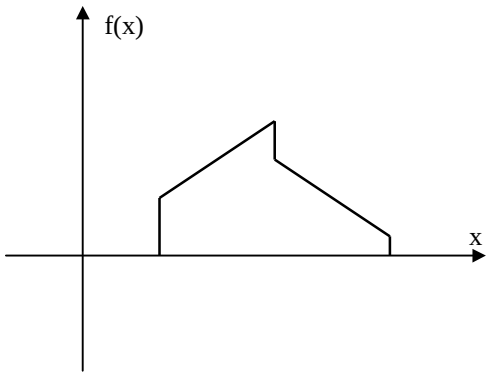


Figure 2.7 Le graphe de la fonction à éroder.

et l'élément structurant présenté dans la figure 2.8:

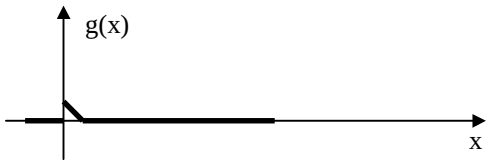


Figure 2.8. L'élément structurant.

Le sous-graph de la fonction f est présenté dans la figure 2.9 a) et le sous-graph de la fonction $g_{(x,t)}$ dans la figure 2.9. b).

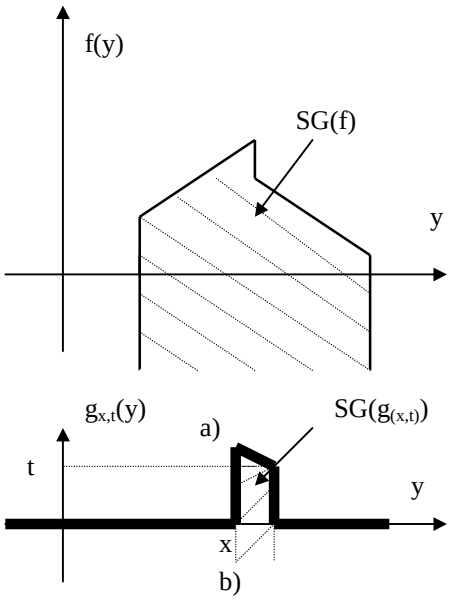


Figure 2.9 Les sous-graphes des fonctions f a) et $g_{(x,t)}$ b).

Pour déterminer le sous-graph de la fonction $f \div \breve{g}$, il faut préciser l'ensemble des points (x,t) pour lesquelles le sous-graph de la fonction $g_{(x,t)}$ est inclus dans le sous-graph de la fonction f. A ce but on prend différentes valeurs pour x et pour t et on vérifie la condition:

$$SG\left(g_{(x,t)}\right) \subset SG(f)$$

Dans la figure suivante on présente les valeurs limites des x et t qui vérifient la condition.

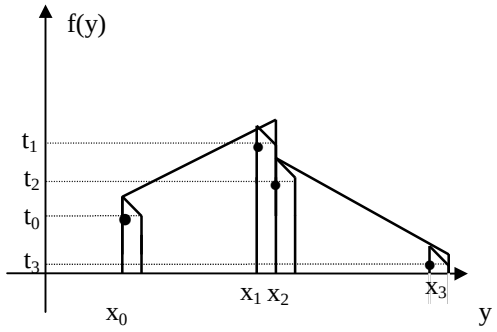


Figure 10. Le calcul du sous-graph de la fonction $f \div \breve{g}$.

La réunion des points de la forme (x_k, t_k) (marqués dans la figure 10) conduit vers la représentation de la figure 11.

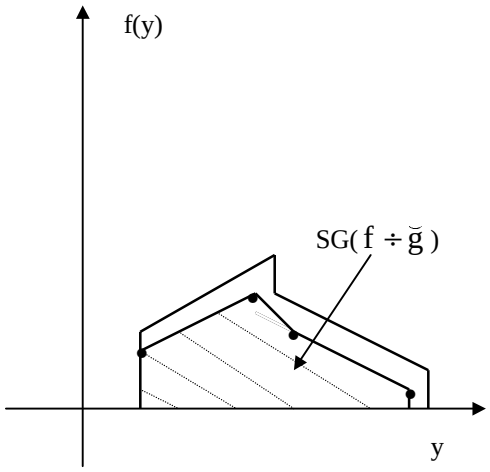


Figure 11. Le sous-graph de la fonction $f \div \breve{g}$.

On peut remarquer que l'aire du SG($f \div \breve{g}$) est plus petite que l'aire du SG(f). C'est à la cause de l'érosion de la fonction f à l'aide de l'élément structurant g. Dans la figure 12 sont présentés la fonction f et sa érodée.

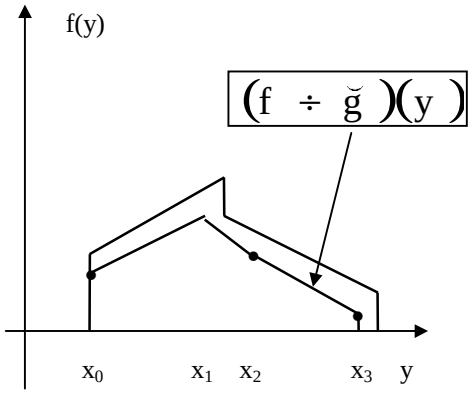


Figure 12. La fonction f et sa érodée.

La relation (3) peut être posée dans la forme:

$$SG\left(E_g\{f\}\right)=\left\{(x,t)\in R^n\times\overline{R}, SG\left(g_{(x,t)}\right)\subset SG(f)\right\}=\left\{(x,t)\in R^n\times\overline{R}, (\forall)u, g(u-x)+t\le f(u)\right\}=$$
$$=\left\{(x,t), (\forall)u, t\le f(u)-g(u-x)\right\} \qquad (4)$$

Donc, pour chaque u, la borne inferieure de la fonction f(u)-g(u-x) est superieure ou égale à t. Cette borne inferieure (qui dépend de u) peut être écrite dans la forme:

$$\wedge_u \{f(u) - g(u-x)\}$$

En utilisant cette notation la relation (4) devient:

$$SG(E_g\{f\}) = \{(x,t), \wedge_u \{f(u) - g(u-x)\} \geq t\}$$

ou, en utilisant la définition du sous-graph:

$$SG(E_g\{f\}) = SG\{\wedge_u \{f(u) - g(u-x)\}\} \quad (5)$$

Voilà pourquoi on peut écrire une nouvelle expression pour l'opérateur d'érosion:

$$E_g\{f\} = \wedge_u \{f(u) - g(u-x)\} \quad (6)$$

Le cas des éléments structurants plans est très important pour le traitement de l'image. Considérons comme élément structurant une fonction de type g_K, associée à un compact K de R^2, et definie par:

$$g_K(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in K \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'erodée de f par l'élément structurant plan g_K est:

$$\{f \div \breve{g}_K\}(x) = \wedge_u \{f(u) - g_K(u-x)\}$$

Mais:

$$g_K(u-x) = \begin{cases} 0, & \text{si } u - x \in K \\ -\infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

ou:

$$g_K(u-x) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \in K_x \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc:

$$f(u) - g_K(u-x) = \begin{cases} f(u), & \text{si } u \in K_x \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et:

$$\wedge_u \{f(u) - g_K(u-x)\} = \wedge_{u \in K_x} \{f(u)\}(x) \quad (7)$$

Voilà pourquoi l'érosion de la fonction f par l'élément structurant g_K peut être calculée par la relation:

$$E_{g_K}\{f\}(x) = \wedge_{u \in K_x} \{f(u)\}(x) \quad (7')$$

C'est une expression très simple pour l'érosion que l'on utilise en pratique dans les programmes.

2.1.1 Propriétés mathématiques

On présente quelques propriétés de l'opérateur d'érosion. Ce sont des propriétés

utiles pour sa caractérisation et pour son utilisation dans les applications. Dans [Pre.'86] on trouve la démonstration de la proposition suivante:

P1. L'érosion par une fonction $g \in \Phi_s$ est une application s.c.s de Φ_s dans Φ_s et une application continue de Φ_i dans Φ_i.

Donc le cadre naturel de l'opérateur d'érosion est celui des fonctions semicontinues.

P2. L'érosion est croissante selon f et décroissante selon g, i.e. :

$$f \le f' \Rightarrow f \div \breve{g} \le f' \div \breve{g} \tag{8}$$

$$g \le g' \Rightarrow f \div \breve{g'} \le f \div g \tag{9}$$

Démonstration

$$(f \div \breve{g})(x) = \inf\left\{ f(y) - g(y-x) \middle| y \in R^n \right\}$$

Si:

$$f \le f'$$

alors:

$$(\forall) y \in R^n \quad f(y) - g(y-x) \le f'(y) - g(y-x)$$

donc:

$$\inf\left\{ f(y) - g(y-x) \middle| y \in R^n \right\} \le \inf\left\{ f'(y) - g(y-x) \middle| y \in R^n \right\}$$

et la croissance de l'érosion est prouvée.

Si:

$$g \le g'$$

alors:

$$-g(y-x) \ge -g'(y-x) \Leftrightarrow f(y) - g(y-x) \ge f(y) - g'(y-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf\left\{ f(y) - g(y-x) \middle| y \in R^n \right\} \ge \inf\left\{ f(y) - g'(y-x) \middle| y \in R^n \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f \div \breve{g})(x) \ge (f \div \breve{g'})(x)$$

et la décroissance de l'érosion selon la fonction g est démontrée.

On présente dans la suite quelques propriétés de la soustraction de Minkovski. La relation entre les opérations d'érosion et l'opération $\vee$ fait l'objet de l'énoncé suivant.

P3. $$f \div (g \vee g') = (f \div g) \wedge (f \div g') \tag{10}$$

Démonstration

Considérons par exemple que pour le point x on a:

$$g(x) \leq g'(x)$$

Alors:

$$g \vee g' = g' \text{ et } f \div (g \vee g') = f \div g' \tag{10.1}$$

et

$$f \div g \geq f \div g'$$

grâce à la propriété P2, d'où:

$$(f \div g) \wedge (f \div g') = f \div g' \tag{10.2}$$

Tenant compte des relations (10.1) et (10.2) on observe que la relation (10) est vérifiée.
Si:

$$g(x) > g'(x)$$

alors:

$$g \vee g' = g$$

et:

$$f \div (g \vee g') = f \div g \tag{10.3}$$

Mais:

$$f \div g \leq f \div g'$$

grâce à la propriété P2, d'où:

$$(f \div g) \wedge (f \div g') = f \div g \tag{10.4}$$

Tenant compte des relations (10.3) et (10.4) on constate que la relation (10) est vérifiée dans ce cas aussi. Parce-que l'analyse déjà faite est valable pour chaque x de R^n, on peut affirmer que la relation (10) est vraie. La propriété suivante présente la relation entre la soustraction de Minkovski et l'opération $\wedge$.

P4. $$f \div (g \wedge g') \geq (f \div g) \vee (f \div g') \tag{11}$$

Démonstration
Soit x un point de R^n. Si:

$$g(x) \leq g'(x)$$

alors:

$$(g \wedge g')(x) = g(x)$$

et:

$$(f \div (g \wedge g'))(x) = (f \div g)(x) \tag{11.3}$$

En même temps:

$$(f \div g)(x) \geq (f \div g')(x) \tag{11.4}$$

d'où:

$$((f \div g) \vee (f \div g'))(x) = (f \div g)(x) \tag{11.5}$$

Tenant compte des relations (11.3),(11.4) et (11.5) on peut écrire:

$$(f \div (g \wedge g'))(x) = (f \div g)(x) \leq (f \div g) \vee (f \div g')(x)$$

Donc dans ce cas la relation (11) est vérifiée, aussi. Parce-que la sélection du point x a été arbitraire on peut affirmer que la relation (11) est vérifiée pour chaque x dans R^n.

P5. Anti-extensivité Si $0_{R^n} \in \text{supp}\{g\}$ et $g(0) \geq 0$, la pseudo-soustraction de Minkovski est anti-extensive, i.e.:

$$f \div g \leq f$$

Démonstration

Soit x un point de R^n. Grâce à la relation (7') on peut écrire:

$$(f \div g)(x) = \wedge_{u \in K_x} \{f(u)\}(x)$$

Mais, est évidente que:

$$\wedge_{u \in K_x} \{f(u)\}(x) \leq f(x)$$

Voilà pourquoi on peut affirmer que la relation (12) est vérifiée et que l'opérateur d'érosion est anti-extensif lui même.

2.1.2 Effets sur les images

L'érosion par un disque:sépare les objets au niveau de leurs étranglements, élimine les objets trop étroits ne contenant pas le disque, rétrécit les objets d'une taille correspondante au rayon du disque.

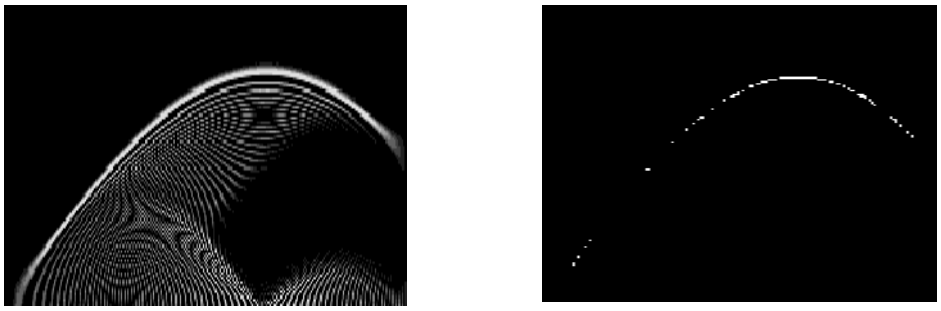


Figure 2.1.3. L'image originale (gauche) et sa érodée (droite) obtenue en utilisant un élément structurant carré.

2.2. La dilatation

L'opérateur dual de l'opérateur d'érosion est l'opérateur de dilatation. Pour définir cet opérateur il faut trouver l'opération duale de la pseudo-soustraction de Minkovski. A ce but on cherche une expression plus simple de la peudo-soustraction de Minkovski. Cette opération est definie par:

$$A \div K = \left\{ x \in R^n \mid K_x \subset A \right\}$$

Pour chaque x de $A \div K$ on a :

$$K_x \subset A$$

ou:

$$(\forall) k \in K, x + k \in A$$

ou:

$$x \in A_{-k}$$

Donc:

$$x \in \bigcap_{k \in K} A_{-k} = \bigcap_{k \in \breve{K}} A_k$$

On peut donc écrire:

$$A \div K = \bigcap_{k \in \breve{K}} A_k \qquad (13)$$

Cette nouvelle expression de la pseudo-soustraction de Minkovski nous permet de trouver son opération duale, notée par $\oplus$, l'addition de Minkovski.

$$A \oplus K = \overline{\overline{A} \div \overline{K}} = \overline{\bigcap_{-k \in \overline{K}} \overline{A}_k} = \bigcup_{k \in \breve{K}} \overline{\overline{A}}_k = \bigcup_{k \in \breve{K}} A_k$$

Donc l'expression ensembliste de l'addition est:

$$A \oplus K = \bigcup_{k \in \breve{K}} A_k \qquad (14)$$

Chaque élément appartenant à $A \oplus K$ a la propriété:

$$x \in \bigcup_{k \in \breve{K}} A_k$$

Il y a donc un certain k, tel que: $x \in A_k$, ou $x - k \in A$. Voilà pourquoi on peut écrire:

$$A \oplus K = \left\{ u, \exists k \in K, u - k \in A \right\} \qquad (15)$$

ou:

$$A \oplus \breve{K} = \left\{ u, \exists k \in K, u + k \in A \right\} \qquad (16)$$

ou:

$$A \oplus \breve{K} = \left\{ u, \exists k \in \breve{K}, u \in A_k \right\} \qquad (17)$$

La relation (15) nous donne l'expression de l'addition de Minkovski des ensembles A et K. L'érosion du ensemble A par l'élément structurant K est donnée par la pseudo-soustraction de Minkovski des ensembles A et $\breve{K}$. Par dualité, la dilatation du ensemble

A par l'élément structurant K est donnée par l'addition de Minkovski des ensembles A et $\breve{K}$, présentée dans les relations (16) et (17).
Revenant à la relation (16), la condition:

$$u + k \in A$$

est équivalente à la condition:

$$K_u \subset A$$

d'où:

$$K_u \cap A \neq \Phi$$

Donc, la relation (16) devient:

$$A \oplus \breve{K} = \{u, K_u \cap A \neq \Phi\}$$

Cette définition de la dilatation est favorable pour le calcul de cette opération.

On présente, dans la suite, quelques exemples. On considère les mêmes exemples pris pour la pseudo-soustraction de Minkovski et pour l'érosion.

E1. A=[-a,a]; K=[-e,e], avec e<<a (voir figure 2.1).

Si:

$$-a \leq \varepsilon + u$$

alors:

$$K_u \cap A \neq \Phi$$

Si:

$$a \geq -\varepsilon + u$$

alors:

$$K_u \cap A \neq \Phi$$

Donc:

$$A \oplus \breve{K} = [-a - \varepsilon, a + \varepsilon]$$

Parce que dans ce cas on a:

$$K = \breve{K}$$

on peut dire que l'addition de Minkovski des ensembles A et K est l'intervalle [-a-e,a+e]. L'opération est présentée dans la figure 2.2.1.

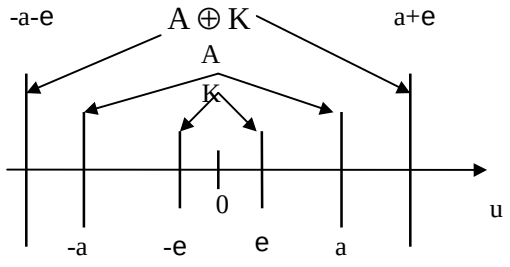


Figure 2.2.1. L'addition de Minkovski de l'exemple 1.

E2. $A = [-a, a] \times [-a, a]$; $K = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon << a$

Si:

$$\begin{cases} -a \le \varepsilon + x \\ -a \le \varepsilon + y \end{cases}$$

alors:

$$K_{(x,y)} \cap A \neq \Phi$$

Si:

$$\begin{cases} a \ge -\varepsilon + x \\ a \ge -\varepsilon + y \end{cases}$$

alors:

$$K_{(x,y)} \cap A \neq \Phi$$

Donc:

$$A \oplus \breve{K} = A \oplus K = \{ -a - \varepsilon \le x \le a + \varepsilon, -a - \varepsilon \le y \le a + \varepsilon \}$$

Cet ensemble est présenté dans la figure 2.2.2.

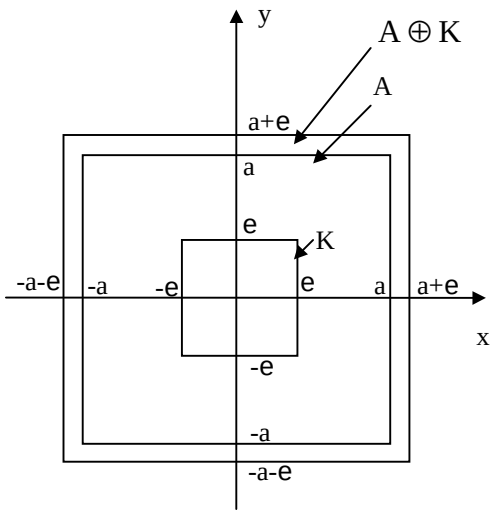


Figure 2.2.2 L'addition de Minkovski de l'exemple 2.

Dans les figures 1 et 2 on peut observer deux exemples de dilatation (parce que dans ces cas $K = \breve{K}$). Ce sont des exemples de traitement des images binaires. Dans la suite on présente la dilatation des images à plusieurs teintes de gris. On calcule, pour le début, l'opérateur dual de l'opérateur de pseudo-soustraction de Minkovski. On sait que:

$$f \div g = \inf \left\{ f(y) - g(x - y) \,\middle|\, y \in R^n \right\}$$

Mais:

$$(f \oplus g)(x) = (f \div^{*} g)(x) = -((-f) \div g)(x) = -\inf\left\{(-f)(y) - g(x-y) \middle| y \in R^n\right\} =$$

$$= \sup\left\{f(y) + g(x-y) \middle| y \in R^n\right\}$$

Donc l'addition de Minkovski est donnée par:

$$(f \oplus g)(x) = \sup\left\{f(y) + g(x-y) \middle| \; y \in R^n\right\} \tag{19}$$

L'érosion morphologique est la pseudo-soustraction de Minkovski de la fonction f par $\breve{g}$. L'opérateur dual de l'érosion, la dilatation, est donc l'addition de Minkovski de la fonction f par $\breve{g}$:

$$(D_g f)(x) = (f \oplus \breve{g})(x) = \sup\left\{f(y) + \breve{g}(x-y) \middle| y \in R^n\right\} \tag{20}$$

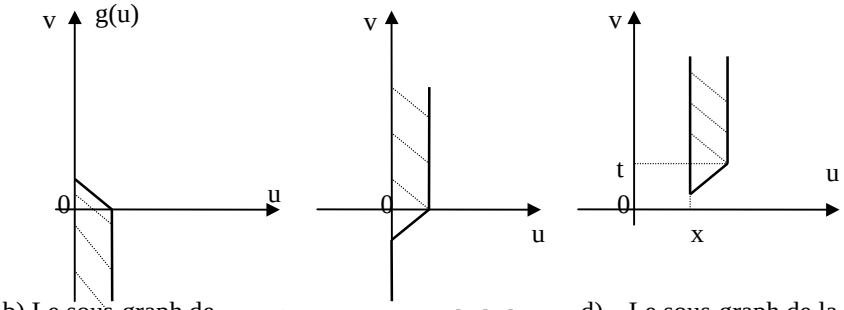
Dans [Sch.,Mat.'94] est énoncée une propriété très intéressante du sous-graph de la dilatation:

$$SG((D_g f)(x)) = SG(f) \oplus SG(\breve{g}) \tag{21}$$

Celui ci peut être calculé à l'aide de l'addition de Minkovski des sous-graphes des fonctions f et $\breve{g}$. Donc:

$$SG((D_g f)(x)) = \{u, SG(f) \cap SG(\breve{g})_u \neq \Phi\} \tag{22}$$

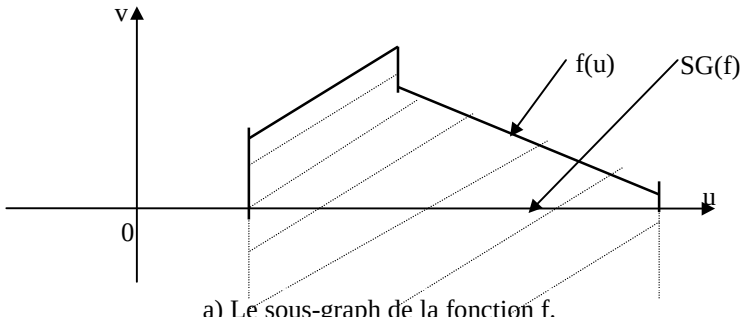
Calculons, par exemple, la dilatation de la fonction f, avec le sous-graph présenté dans la figure 2.2.3 a), à l'aide du élément structurant g, avec le sous-graph présenté dans la figure 2.2.3 b).



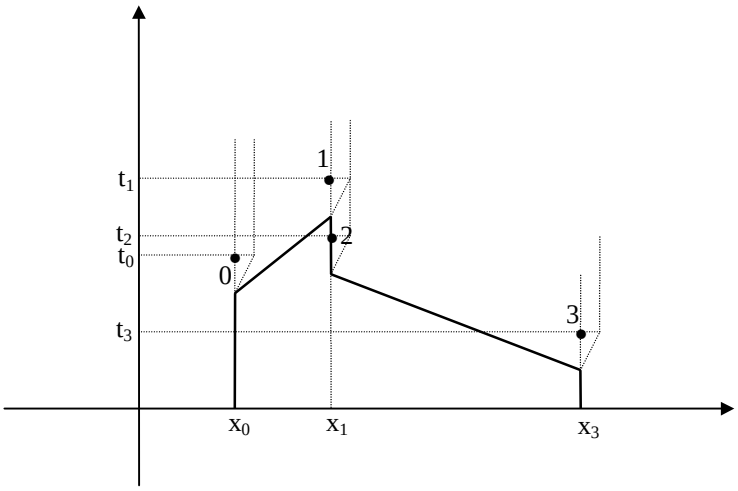
b) Le sous-graph de l'element structurant

c) Le sous-graph de la fonction $\breve{g}$.

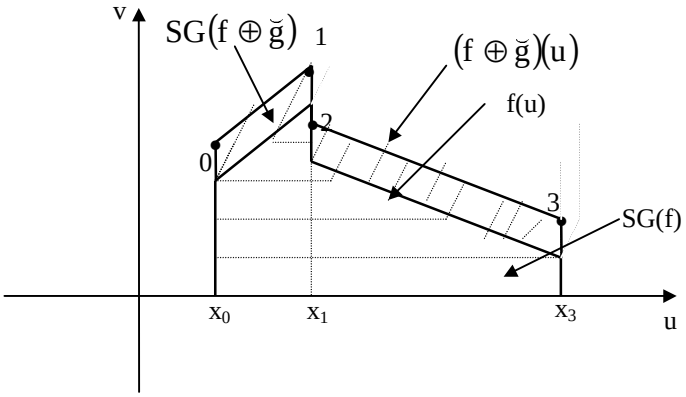
d) Le sous-graph de la fonction $\breve{g}_{(x,t)}$.



a) Le sous-graph de la fonction f.



e) Le calcul du sous-graph de la fonction $f \oplus \breve{g}$.



f) Le sous-graph de la fonction $f \oplus \breve{g}$ et sa representation graphique.

Figure 2.2.3 Le calcul du sous-graph de la dilatation.

L'aire du $SG(f \oplus \breve{g})$ est plus grande que l'aire du SG(f). C'est à la cause que $f \oplus \breve{g}$ représente la dilatation de la fonction f.

Trouvons une nouvelle expression pour la dilatation d'une fonction donnée. On utilise à ce but la relation (6) du paragraphe 2.1:

$$E_g\{f\}(x) = \wedge_u \{f(u) - g(u-x)\}$$

et on prends le dual:

$$D_g\{f\}(x) = E_g{}^*\{f\}(x) = -E_g\{-f\}(x) = -\wedge_u \{-f(u) - g(u-x)\} = \vee_u \{f(u) + g(u-x)\}$$

On a démontré ainsi que:

$$D_g\{f\}(x) = \vee_u \{f(u) + g(u-x)\} \qquad (23)$$

Dans le cas des éléments structurants plans associés au compact K:

$$g_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } K \\ -\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

on a:

$$g_K(u-x) = \begin{cases} 0, & \text{si } u - x \in K \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

ou:

$$g_K(u-x) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \in K_x \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut donc écrire:

$$f(u) + g_K(u-x) = \begin{cases} f(u), & \text{si } u \in K_x \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et:

$$D_g\{f\}(x) = \vee_{u \in K_x} \{f(u)\} \qquad (24)$$

Donc, dans le cas des éléments structurants plans, l'expression de la dilatation est très simple (voir la dernière relation). Cette expression est utilisée en pratique.

2.2.1. Propriétés mathématiques

Grâce à la dualité entre l'érosion et la dilatation on peut énoncer des propriétés correspondantes aux propriétés présentées dans 2.1.1, pour la dilatation. Dans [Pre.'86] on trouve la démonstration de la propriété suivante:

P1.

1. Φ_s et Φ_i sont stables pour la dilatation i.e. :
$$(\forall) g \in \Phi_s, (\forall) f \in \Phi_s, (\forall) f_1 \in \Phi_i \; ; \; f \oplus \breve{g} \in \Phi_s \text{ et } f_1 \oplus \breve{g} \in \Phi_i$$
2. La dilatation est une application continue de Φ_s dans Φ_s et s.c.i. de Φ_i dans Φ_i.

Une autre propriété de la dilatation est celle de croissance.

P2.

$$f \le f_1 \Rightarrow f \oplus \breve{g} \le f_1 \oplus \breve{g} \tag{25}$$
$$g \le g_1 \Rightarrow f \oplus \breve{g} \le f \oplus \breve{g}_1 \tag{26}$$

Démonstration

$$(f \oplus \breve{g})(x) = -\sup\left\{ f(y) + \breve{g}(x-y) \,\middle|\, y \in R^n \right\} \le \sup\left\{ f_1(y) + \breve{g}(x-y) \,\middle|\, y \in R^n \right\} =$$
$$= (f_1 \oplus \breve{g})(x)$$

Donc:

$$(f \oplus \breve{g})(x) \le (f_1 \oplus \breve{g})(x)$$

ce qu'il fallait démontrer.

$$(f \oplus \breve{g})(x) = \sup\left\{ f(y) + \breve{g}(x-y) \,\middle|\, y \in R^n \right\} \le \sup\left\{ f(y) + \breve{g}_1(x-y) \,\middle|\, y \in R^n \right\}$$

Donc:

$$(f \oplus \breve{g})(x) \le (f \oplus \breve{g}_1)(x)$$

(c.q.f.d)

La relation entre la dilatation et l'opérateur $\wedge$ fait l'objet de la propriété suivante.

P4.

$$f \oplus (g \wedge g_1) \le (f \oplus g) \wedge (f \oplus g_1)$$

Démonstration

Soit x un point de R^n. Considérons que:

$$g(x) \le g_1(x)$$

Alors:

$$(g \wedge g_1)(x) = g(x) \text{ et } f \oplus (g \wedge g_1) = f \oplus g$$

Parce que dans ce cas:

$$f \oplus g \leq f \oplus g_1$$

on a:

$$g \wedge g_1 = g_1 \text{ et } f \oplus (g \wedge g_1) = f \oplus g_1 \leq f \oplus g$$

En même temps:

$$(f \oplus g) \wedge (f \oplus g_1) = f \oplus g_1$$

Donc:

$$f \oplus (g \wedge g_1) = f \oplus g_1 = (f \oplus g) \wedge (f \oplus g_1)$$

et la relation (27) est vérifiée dans ce cas aussi.

Une autre propriété intéressante de la dilatation est celle qui exprime la relation avec l'opération $\vee$.

P5.

$$(f \oplus g) \oplus g' = f \oplus (g \oplus g') \tag{28}$$

Démonstration
Calculons le sous-graph de la fonction $(f \oplus g) \oplus g'$:

$$SG((f \oplus g) \oplus g') \overset{(21)}{=} SG(f \oplus g) \oplus SG(g') \overset{(21)}{=} SG(f) \oplus SG(g) \oplus SG(g')$$

Calculons le sous-graph de la fonction $f \oplus (g \oplus g')$:

$$SG(f \oplus (g \oplus g')) \overset{(21)}{=} SG(f) \oplus SG(g \oplus g') \overset{(21)}{=} SG(f) \oplus SG(g) \oplus SG(g')$$

Donc:

$$SG((f \oplus g) \oplus g') = SG(f \oplus (g \oplus g'))$$

Voilà pourquoi on peut dire que la relation (28) est vraie.
L'érosion a une propriété semblable:

P6'.

$$(f \div g) \div g' = f \div (g \oplus g') \tag{29}$$

Démonstration

On a montré déjà que:

$$f \oplus g = -\left(\left(-f\right) \div g\right) \tag{29.1}$$

d'où:

$$\left(-f\right) \div g = -\left(f \oplus g\right)$$

Soit $h = -f$. On obtient:

$$h \div g = -\left(\left(-h\right) \oplus g\right) \tag{29.2}$$

Prenons le membre droit de la relation (29). En utilisant une relation du type (29.2) on peut écrire:

$$f \div \left(g \oplus g'\right) = -\left(\left(-f\right) \oplus \left(g \oplus g'\right)\right) = -\left(h \oplus \left(g \oplus g'\right)\right)$$

En utilisant la relation (28) on obtient:

$$f \div \left(g \oplus g'\right) = -\left(\left(h \oplus g\right) \oplus g'\right) = -\left(\left(\left(-f\right) \oplus g\right) \oplus g'\right) \tag{29.3}$$

Mais, tenant compte de la relation (29.2):

$$\left(-f\right) \oplus g = -\left(f \div g\right)$$

et la relation (29.3) devient:

$$f \div \left(g \oplus g'\right) = -\left(\left(-\left(f \div g\right) \oplus g'\right)\right)$$

ou, en utilisant une relation de type (29.2):

$$f \div \left(g \oplus g'\right) = \left(f \div g\right) \div g'$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les propriétés P_5 et P_6 nous donnent la possibilité de décomposer la dilatation. Ainsi on peut calculer la dilatation d'une fonction à l'aide d'un élément structurant compliqué en utilisant les dilatations de cette fonction calculées avec des éléments structurants plus simples (obtenus par la décomposition de l' élément structurant original).
Enfin la dernière propriété intéressante de l'opérateur de dilatation est l'extensivité.

P7.

$$g\left(0\right) \geq 0 \Leftrightarrow f \leq f \oplus g \tag{30}$$

Démonstration

Prenons le cas d'un élément structurant plan (dans ce cas la fonction g(x) satisfait la

condition $g(0) \geq 0$). On peut utiliser la relation (24):

$$D_{\breve{g}}\{f\}(x) = \bigvee_{u \in \breve{K}_x} \{f(u)\} = (f \oplus g)(x)$$

Mais est évident que pour chaque x le sup des fonctions f(u) pour chaque u appartenant à $\breve{K}_x$ est plus grand que la fonction f(x):

$$\bigvee_{u \in \breve{K}_x} \{f(u)\} \geq f(x)$$

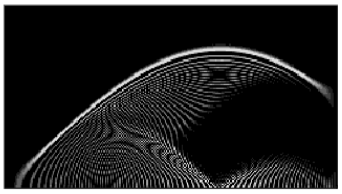
Voilà pourquoi on peut écrire:

$$f(x) \leq (f \oplus g)(x)$$

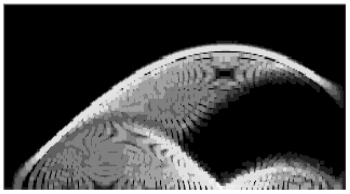
Donc l'opérateur d'addition de Minkovski est extensif. Voilà pourquoi on peut affirmer que la dilatation est un opérateur extensif.

2.2.2 Effets sur les images

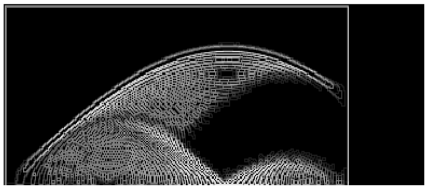
La dilatation par un disque: connecte les objets quand ils sont proches, comble les trous étroits présents dans les objets, élargit les objets d'une taille correspondant au rayon du disque. On peut observer un exemple d'image et sa dilatée dans la figure 2.2.2.1.



a) L'image initiale.



b) L'effet de la dilatation.



c) L'image d'erreure.

Figure 2.2.2.1 L'effet de l'operateur de dilatation sur les images.

2.2.3. Dilatations et érosions algébriques

Les opérateurs d'érosion et de dilatation peuvent être définis sur les treillis aussi. On obtient ainsi des généralisations des notions introduits déjà. Voilà pourquoi on appelle ces opérateurs érosion et dilatation algébriques.

Dans la suite, $\Im$ sera un treillis complet. On appellera opérateur sur un treillis complet $\Im$ toute application de $\Im$ dans lui-même. Définissons à présent les propriétés algébriques que peuvent vérifier les opérateurs.

Définition Soit $\Im$ un treillis complet, et soit Ψ un opérateur de $\Im$.
Ψ est CROISSANT si: $(\forall)x, y \in \Im,\ x \le y \Rightarrow \Psi(x) \le \Psi(y)$
Ψ est EXTENSIF (resp. ANTI-EXTENSIF) si: $\forall(x) \in \Im,\ x \le \Psi(x)\ (\text{resp. } x \ge \Psi(x))$
Ψ est IDEMPOTENT si: $(\forall)x \in \Im, \Psi(x) = \Psi(\Psi(x))$.

Soit $\Im$ un treillis complet et soit Ψ un opérateur croissant sur $\Im$, alors pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$, $x_i \in \Im$ on a:

$$\Psi(\vee x_i) \ge \vee \Psi(x_i)$$

et:

$$\Psi(\wedge x_i) \le \wedge \Psi(x_i)$$

On dit qu'un ensemble $A \subset \Im$ est fermé pour l'opérateur θ ou θ-FERME, si:

$$(\forall)x \in A, \theta(x) \in A$$

L'ensemble des opérateurs croissants sur le treillis $\Im$ est lui-même un treillis pour la relation d'ordre:

$$\Phi \le \Psi \Leftrightarrow (\forall)x \in \Im,\ \Phi(x) \le \Psi(x)$$

Le sup est donné alors par:

$$(\vee \Phi_i)(x) = \vee (\Phi_i(x))$$

Si $\Im$ est le treillis booléen usuel $\Pi(R^n)$, notons T le groupe des translations de R^n. Voici la définition des opérateurs compatibles avec les translations, les τ-opérateurs, qui forment une des classes fondamentales que nous étudierons par la suite.

Définition Un opérateur Ψ sur $\Pi(E)$ est dit compatible avec la translation ou τ-opérateur si:

$$\Psi(X \oplus \{x\}) = \Psi(X) \oplus \{x\}, (\forall) X \in \Pi(E), (\forall)x \in E$$

Maintenant on peut introduire les opérateurs d'érosion et dilatation algébriques.

Définition Soit $\Im$ un treillis complet. Un opérateur croissant δ est une dilatation si et seulement si il existe un opérateur ε vérifiant:

$$\delta(x) \le y \Leftrightarrow x \le \varepsilon(y), (\forall)x, y \in \Im \tag{31}$$

L'opérateur ε est une érosion donnée par:

$$\varepsilon(x) = \vee\{b \in \Im, \delta(b) \le x\} \tag{32}$$

De même, soit ε un opérateur croissant, alors ε est une érosion, si et seulement si il existe un opérateur δ vérifiant la relation (31). L'opérateur δ est alors une dilatation donnée par:

$$\delta(x) = \wedge\{b \in \Im, \delta(b) \le x\} \tag{33}$$

Ainsi, les classes de dilatations et d'érosions sur $\Im$ forment deux treillis complets isomorphes qui sont duaux pour la bijection definie par la relation (31).

Démonstration Montrons d'abord que la formule (31) implique l'unicité de ε en montrant que ε ne peut valoir que:

$$\delta^*(x) = \vee\{b, \delta(b) \le x\}$$

Par hypothèse:

$$(\forall)x,\ \delta(b) \le x \ \Leftrightarrow\ b \le \varepsilon(x)$$

Donc:

$$\vee\{b,\ \delta(b) \le x\} \le \varepsilon(x)$$

On a montré ainsi que:

$$\delta^*(x) \le \varepsilon(x) \tag{33.1}$$

Mais:

$$(\forall)x,\ \varepsilon(x) \le \varepsilon(x) \overset{(31)}{\Rightarrow}\ x \ge \delta(\varepsilon(x))$$

Parce que δ^* est un opérateur croissant, on peut écrire:

$$\delta^*(x) \ge \delta^*\{\delta\{\varepsilon(x)\}\} = \vee\{b,\ \delta(b) \le \delta\{\varepsilon(x)\}\}$$

ou, par la croissance de δ:

$$\delta^*(x) \ge \vee\{b,\ b \le \varepsilon(x)\} = \varepsilon(x)$$

Donc:

$$\delta^*(x) \ge \varepsilon(x) \tag{33.2}$$

Grâce aux relations (33.1) et (33.2) on peut écrire:

$$\delta^*(x) = \varepsilon(x)$$

Parce que cette relation est valable pour chaque élément x on obtient le résultat:

$$\delta^* = \varepsilon \tag{33.3}$$

Donc, l'opérateur ε est unique.

Montrons maintenant l'équivalence donnée par la relation (31).
Pour le commencement montrons que:

$$\delta(x) \le y \Rightarrow x \le \varepsilon(y), (\forall) x, y \in \Im \tag{33.4}$$

Supposons que:

$$\delta(b) \le x$$

Par sa définition:

$$\delta^*(x) = \vee\{b, \delta(b) \le x\} \ge b$$

Donc, en utilisant la relation (33.3) on peut écrire:

$$\delta(b) \le x, \Rightarrow \varepsilon(x) = \delta^*(x) \ge b$$

La relation (33.4) est prouvée.
Maintenant, montrons que:

$$x \le \varepsilon(y) \Rightarrow \delta(x) \le y \tag{33.5}$$

Si:

$$b \le \varepsilon(x) = \delta^*(x)$$

par la croissance de δ on peut écrire:

$$\delta(b) \le \delta\left(\delta^*(x)\right) = \delta\{\vee\{b, \delta(b) \le x\}\}$$

Mais grâce à la définition précédente δ commute avec sup. Donc:

$$\delta(\vee\{b, \delta(b) \le x\}) = \vee(\delta\{b, \delta(b) \le x\}) = \vee\{\delta(b), \delta(b) \le x\} \le x$$

On a montré ainsi que:

$$\delta(b) \le x$$

Donc la relation (33.5) est prouvée.
Finalement il faut montrer que si δ est croissant et vérifie la relation (31) alors δ commute avec le sup.
Soit la famille (x_i). Comme δ est croissant on a:

$$\delta(\vee x_j) \ge \delta(x_i)$$

pour tout i.
Soit i tel que:

$$\delta(x_i) = \vee\delta(x_j)$$

Alors:

$$\delta(\vee x_j) \ge \vee\delta(x_j) \tag{33.6}$$

On peut écrire:

$$\delta(x_i) \le \vee\delta(x_j) \overset{(33)}{\Rightarrow} x_i \le \varepsilon(\vee\delta(x_j)), (\forall) i$$

ou:

$$\vee x_i \le \varepsilon\left(\vee \delta\left(x_j\right)\right) \overset{(33)}{\Leftrightarrow} \delta\left(\vee x_i\right) \le \vee \delta\left(x_j\right) \tag{33.7}$$

En utilisant les relations (33.6) et (33.7) on peut donc écrire:

$$\delta\left(\vee x_j\right) = \vee \delta\left(x_j\right)$$

Donc l'opérateur δ commute avec le sup.

On dira que δ et ε sont OPERATEURS ADJOINTS.

Le théorème suivant nous montre le lieu privilégié de l'opérateur d'érosion dans le cadre de la morphologie mathématique.

Théorème: Soit Ψ un opérateur. Il est croissant et vérifie $\Psi(U) = U$ si et seulement si Ψ est un sup d'érosions et on a $\Psi = \vee \varepsilon_b, b \in \Im$, avec:

$$\varepsilon_b(x) = \begin{cases} U, & \text{si} \quad x \in U \\ \Psi(b), & \text{si } x \neq U \text{ et } x \ge b \\ \Phi, & \text{sinon} \end{cases} \tag{34}$$

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [Sch., Mat.'94].

Ainsi les érosions permettent-elles d'engendrer tous les opérateurs croissants à l'aide du sup. On identifie, dans la suite, le treillis $\Im$ au treillis booléen $\Pi(E)$ où E est égal soit à R^n soit à Z^n. Décrivons les opérateurs de $\Pi(E) \to \Pi(E)$ comme des extensions d'applications de $E \to \Pi(E)$. Un point x de E pris comme un élément de $\Pi(E)$ sera toujours noté par $\{x\}$.

Théorème. Soit δ une dilatation de $\Pi(E)$. L'opérateur δ est entièrement déterminé par les dilatés des ensembles $\{x\}, x \in E$.

$$\delta(X) = \bigcup_{x \in X} \delta(x), \quad X \in \Pi(E) \tag{35}$$

Réciproquement, toute fonction $\delta : E \to \Pi(E)$ s'étend de manière unique dans une dilatation de $\Pi(E) \to \Pi(E)$. Ainsi par abus de notation la lettre δ représente soit une application de E dans $\Pi(E)$ qui s'étend dans une dilatation, soit une dilatation algébrique de $\Pi(E) \to \Pi(E)$. En morphologie mathématique on appelle FONCTION STRUCTURANTE sur E toute application de E sur $\Pi(E)$. Une fonction structurante sur E peut aussi être considérée comme une APPLICATION MULTIVOQUE de E dans E (appelée parfois CORRESPONDENCE).

Théorème. Toute τ-dilatation δ sur $\Pi(E)$ est de la forme:

$$\delta(X) = X \oplus A$$

pour A fixé, appelé ELEMENT STRUCTURANT. Son érosion adjointe est:

$$\varepsilon(X) = X \div \check{A}$$

En fait, la classe des dilatations $\delta : \Pi(E) \to \Pi(E)$ invariantes par translation coïncide avec la classe des fonctions $X \to X \oplus A$ pour $A \in \Pi(E)$. Les dilatations morphologiques sont donc bien des dilatations algébriques.

3. Opérateurs morphologiques dérivés

L'érosion et la dilatation seules ne permettent pas de mettre en évidence des caractéristiques très intéressantes des images. En utilisant ces deux opérateurs on peut obtenir différentes combinaisons qui représentent des opérateurs morphologiques dérivés. Prenons pour le commencement deux exemples: le gradient morphologique et les filtres de contraste.

3.1. Le gradient morphologique

Le gradient est un opérateur utilisé souvent pour le traitement de l'image, surtout pour l'extraction des contours. Cet opérateur est definie à l'aide des dérivées partielles de l'image. Son module peut être approximé à l'aide des opérateurs morphologiques d'érosion et de dilatation. Soit B(r) la boule de rayon r et $g_{B(r)}$ l'élément structurant plan associé au compact B(r):

$$g_B(r) = \begin{cases} 0 & \text{sur } B(r) \\ -\infty & \text{sur } R^3 \setminus B(r) \end{cases}$$

Le module du gradient morphologique est definie par:

$$\lim_{r \to 0} \frac{f \oplus g_{B(r)} - f \div g_{B(r)}}{2r}$$

L'expression $f \oplus g_{B(r)} - f \div g_{B(r)}$ nous donne une bande d'épaisseur 2r centrée sur les contours de l'image f. Voilà pourquoi la définition précédente peut être utilisée pour l'extraction des contours de l'image f.

3.2. Les filtres de contraste

Leur principe est de renforcer le contraste d'une image en faisant basculer des pixels de façon discontinue. Formellement: soit f une image et (f_1, f_2) deux images transformées vérifiant:

$$f_1 \le f \le f_2$$

Typiquement, f_1 sera une érodée et f_2 sera une dilatée de f.
L'image transformée sera:

$$f(x) \to \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad f(x) - f_1(x) < f_2(x) - f(x) \\ f_2(x) & \text{si} \quad f(x) - f_1(x) > f_2(x) - f(x) \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur des pixels est donc remplacée par la valeur la plus proche selon f_1 et f_2. L'érosion et la dilatation sont des transformations duales. Elles ne sont pas inverses. Ceci nous permet d'étudier quelques opérateurs classiques donnant accès à des primitives morphologiques plus

complexes et ayant de meilleures propriétés, en particulier l'idempotence. Parmi ceux-ci les plus importantes deux sont: l'ouverture et la fermeture.

3.3. L'ouverture morphologique

Soit X une image et B un élément structurant. Cette opération morphologique est definie pour les images binaires par:

$$X_B = \left(X \div \breve{B}\right) \oplus B \tag{36}$$

Mais:

$$\left(X \div \breve{B}\right) \oplus B = \left\{u, \left(X \div \breve{B}\right) \cap \breve{B}_u \neq \Phi\right\} = \left\{u, (\exists) v, v \in X \div \breve{B} \text{ et } v \in \breve{B}_u\right\} =$$
$$= \left\{u, (\exists) v, B_v \subset X \text{ et } v \in \breve{B}_u\right\}$$

Mais:

$$v \in \breve{B}_u = \left\{b \in B, u - b\right\} \Rightarrow v = u - b \Rightarrow u = v + b \Rightarrow u \in B_v$$

Donc:

$$\left(X \div \breve{B}\right) \oplus B = \left\{u, (\exists) v, B_v \subset X \text{ et } u \in B_v\right\} =$$
$$= \left\{u, B_u \subset X\right\} = \bigcup_u \left\{B_u, B_u \subset X\right\}$$

On a obtenu la relation équivalente:

$$X_B = \bigcup_u \left\{B_u, B_u \subset X\right\} \tag{37}$$

Donc X_B représente l'espace balayé par l'élément structurant B, lorsqu'il est totalement inclus dans X. Prenons un exemple.

E1. Soit n=2, X=[-a,a]×[-a,a] et B=[-e,e]×[-e,e], e<<a.
On peut observer que:

$$B = \breve{B}$$

Le résultat de l'opération $X \div \breve{B}$ est présenté dans la figure 3.3.1.

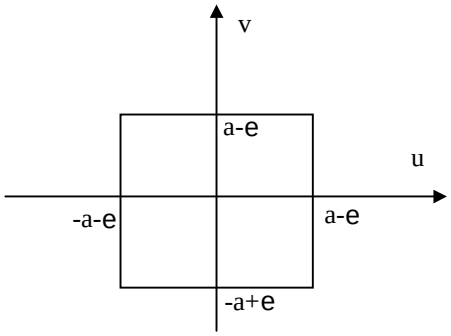


Figure 3.3.1. L'érosion de l'image X en utilisant l'élément structurant B.

Le résultat de l'opération:

$$\left(X \div \breve{B}\right) \oplus B$$

est présenté dans la figure 3.3.2.

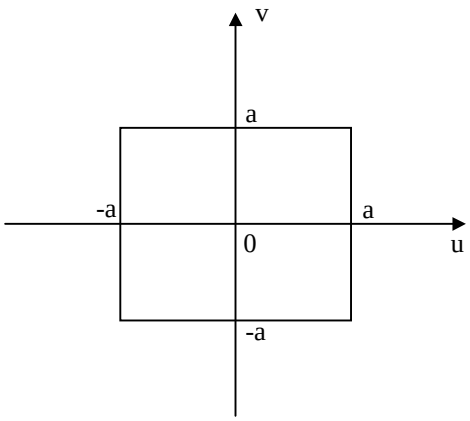


Figure 3.3.2. L'ouverture de l'image X en utilisant l'élément structurant B.

On présente dans la suite quelques propriétés de l'ouverture.

P1. L'ouverture est croissante:

$$X \subset Y \Rightarrow X_B \subset Y_B \qquad (38)$$

Démonstration

$$X_B = \bigcup_u \{B_u, B_u \subset X\} \subset \bigcup_u \{B_u, B_u \subset Y\} = Y_B$$

P2. L'ouverture est anti-extensive.

$$X_B \subset X \qquad (39)$$

Démonstration

$$X_B = \bigcup_u \{B_u,\ B_u \subset X\}$$

Mais, pour chaque u, $B_u \subset X$. Voilà pourquoi on peut écrire:

$$\bigcup_u \{B_u, B_u \subset X\} \subset X \qquad \text{(c.q.f.d)}$$

P3. L'ouverture est idempotente.

$$(X_B)_B = X_B \tag{40}$$

Démonstration

$$X_B = \bigcup_u \{B_u,\ B_u \subset X\};\ (X_B)_B = \bigcup_v \{B_v,\ B_v \subset X_B\}$$

Mais grâce à la propriété P_2, $X_B \subset X$. Voilà pourquoi la dernière relation devient:

$$(X_B)_B = \bigcup_v \{B_v,\ B_v \subset X\} = X_B \tag{41}$$

Donc la propriété 3 est prouvée.

P4. L'ouverture commute avec les translations:

$$(X_B)_x = (X_x)_B \tag{42}$$

Démonstration

$$X_B = (X \div \breve{B}) \oplus B = \bigcup_{b \in \breve{B}} (X \div \breve{B})_b = \bigcup_{b \in \breve{B}} \left(\bigcap_{b \in B} X_b \right)_b$$

$$(X_B)_x = \bigcup_{b \in \breve{B}} \left(\bigcap_{b \in B} \{a \in X,\ a + x\}_b \right)_b \tag{42.1}$$

D'autre part:

$$(X_x)_B = (X_x \div \breve{B}) \oplus B = \bigcup_{b \in \breve{B}} (X_x \div \breve{B})_b = \bigcup_{b \in \breve{B}} \left(\bigcap_{b \in B} X_{x_b} \right)_b = \tag{42.2}$$

$$= \bigcup_{b \in \breve{B}} \left(\bigcap_{b \in B} \{a \in X, a + x\}_b \right)_b$$

Les membres droits des relations (42.1) et (42.2) sont identiques. C'est pourquoi la relation (42) est vérifiée.

Malheureusement il n'y a pas de formule fonctionnelle sympathique pour l'ouverture et l'application de cet opérateur aux images à plusieurs tentes de gris semble difficile. Heureusement on peut effectuer une ouverture section superieure par section superieure lorsque l'on utilise un élément structurant plan de type g_K. Chaque image à plusieurs tentes de gris peut

être regardée comme une fonction tridimensionnelle. On peut sectionner le graphique de cette fonction par des plans parallèles correspondant à chaque niveau de gris. Chaque tel plan est en fait une image binaire. Donc on peut appliquer à chaque telle image une ouverture. Les résultats obtenues peuvent être comme les sections de l'ouverture de l'image à plusieurs tentes de gris. C'est une méthode de calcul pour le résultat de l'application de n'importe quel opérateur morphologique à une image à plusieurs tentes de gris basée sur les calculs des résultats des applications de l'opérateur binaire correspondent aux images de section. Pour l'ouverture on peut écrire:

$$\left(f_{g_K}\right)_\lambda = \left(f_\lambda\right)_K \tag{43}$$

où λ est l'indice de la section (du niveau de gris). La dernière relation signifie que la section λ de l'ouverture morphologique de l'image f est identique à l'ouverture morphologique de l'image binaire f_λ (la section λ de l'image f).

L'opérateur dual de l'ouverture morphologique est la fermeture morphologique.

3.4. La fermeture morphologique

Parce que l'opérateur dual de l'érosion est la dilatation et réciproquement on peut calculer la fermeture de l'ensemble X par l'élément structurant B, notée par X^B avec la relation:

$$X^B = \left(X \oplus \breve{B}\right) \div B \tag{44}$$

3.4.1. Propriétés mathématiques

Ce sont des propriétés duales aux propriétés de l'ouverture.

P1. La fermeture est croissante:

$$X \subset Y \Rightarrow X^B \subset Y^B \tag{45}$$

Démonstration

$$X^B = C\left(\left(CX\right)_B\right); Y^B = C\left(\left(CY\right)_B\right)$$

$$X \subset Y \Rightarrow CX \supset CY \overset{(12)}{\Rightarrow} \left(CX\right)_B \supset \left(CY\right)_B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C\left(\left(CX\right)_B\right) \subset C\left(\left(CY\right)_B\right) \Leftrightarrow X^B \subset Y^B \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

P2. La fermeture est extensive.

$$X \subset X^B \tag{46}$$

Démonstration

$$X^B = C\left((CX)_B\right)$$

L'ouverture est anti-extensive:

$$(CX)_B \subset CX \Leftrightarrow C\left((CX)_B\right) \supset C(CX) = X \Leftrightarrow X \subset X^B \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

P3. La fermeture est idempotente:

$$\left(X^B\right)^B = X \tag{47}$$

Démonstration

$$\left(X^B\right)^B = C\left(\left(CX^B\right)_B\right) = C\left(C\left(C[\left((CX)_B\right)_B]\right)\right)$$

L'ouverture est idempotente. Donc:

$$\left((CX)_B\right)_B = (CX)_B \Leftrightarrow C\left(\left((CX)_B\right)_B\right) = C\left((CX)_B\right) = X^B$$

et:

$$C\left(\left(C\left(C\left((CX)_B\right)_B\right)\right)\right) = C\left(\left(C\left(X^B\right)\right)\right) = X^B$$

Donc:

$$\left(X^B\right)^B = X^B \qquad \text{(c.q.f.d.)}$$

P4. La fermeture commute avec les translations:

$$\left(X^B\right)_x = (X_x)^B \tag{48}$$

Démonstration

$$X^B = C\left((CX)_B\right)$$

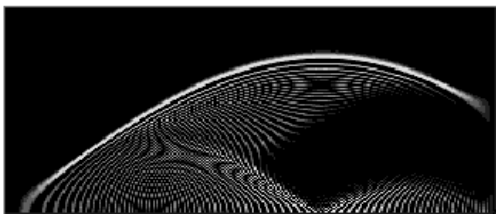
L’ouverture commute avec les translations:

$$((CX)_B)_x = ((CX)_x)_B \Leftrightarrow C(((CX)_B)_x) = C(((CX)_x)_B) \Leftrightarrow (X^B)_x = (X_x)^B \text{ (c.q.f.d.)}$$

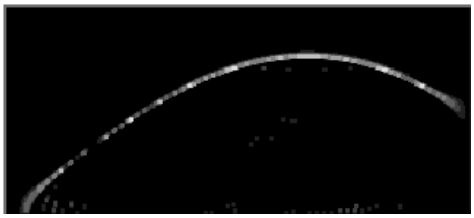
3.4.2. Effets de l’ouverture et de la fermeture sur les images

L’ouverture par un disque a essentiellement trois effets sur les images binaires:
filtrage des contours,
élimination des particules trop étroites,
séparation en plusieurs composantes des particules présentant un étranglement assez long et étroit,

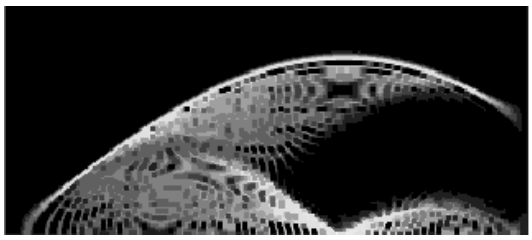
La fermeture par un disque a sur les images binaires les effets duaux. Dans les figures 3.4.2.1 b) et 3.4.2.1 c) sont présentés des exemples d’ouverture et de fermeture morphologiques.



a) L’image originale.



b) L’image de l’ouverture de l’image originale.



c) L’image de la fermeture de l’image originale.

Figure 3.4.2.1. Les effets sur les images de l’opérateur d’ouverture et de fermeture.

3.4.3. Un exemple d’utilisation de l’ouverture morphologique

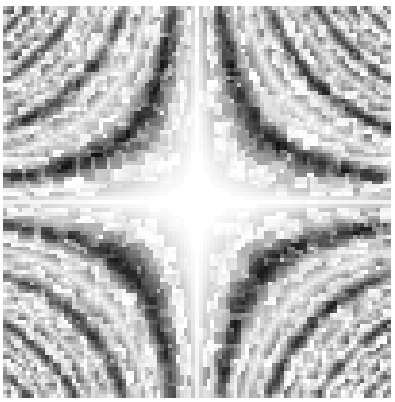
Un premier exemple d’utilisation de l’ouverture est dans le cadre de l’opérateur morphologique

appelé CHAPEAU HAUT-DE-FORME (top hat en anglais). Il s'agit de la transformation

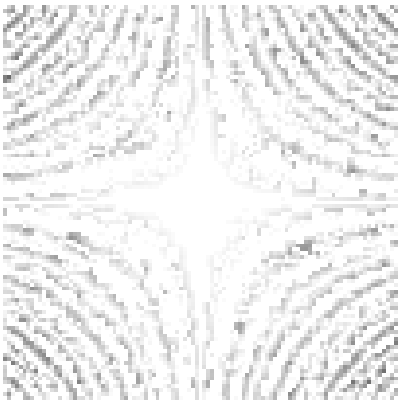
morphologique la plus populaire, permettant d'extraire sur une image les structures contrastées et de faible épaisseur, ceci indépendamment de la valeur absolue de l'éclairage ambiant. Il est donné par:

$$f - f_g \qquad (49)$$

où g peut être tout élément structurant, en particulier g_B où B est un cercle. Dans le cas du sous-graphe d'une demi-sphere, on parle plutôt de ROLLING BALL.
On présente dans la figure 3.4.3.1 l'effet de l'application de l'opérateur morphologique chapeau haute-de-forme à une image. On a utilisé un élément structurant carré.



a) L'image originale.



b) L'image obtenue par l'utilisation de la chapeau haute-de-forme.

3.4.4. Ouvertures et fermetures algébriques

Nous nous intéressons à présent à la composition d'opérateurs croissants et aux nouvelles propriétés qu'ils possèdent.

Définition. Soit ψ un opérateur croissant sur le treillis booléen $\Pi(E)$.
ψ est une ouverture algébrique si et seulement si ψ est anti-extensif et idempotent.
ψ est une fermeture algébrique si et seulement si ψ est extensif et idempotent.

Dans le treillis $\Pi(E)$, la dilatation $X \to \delta(X)$ et son érosion adjointe $X \to \varepsilon(X)$ n'admettent pas d'inverse. Il n'y a donc aucun moyen pour déterminer un élément X à partir de $\delta(X)$ ou de $\varepsilon(X)$. On a seulement:

$$\delta\{\varepsilon(X)\} \leq X \leq \varepsilon\{\delta(X)\}$$

En notant I l'application identité de $\Pi(E)$ dans lui même, une autre façon d'exprimer ce résultat est:

$$\delta\varepsilon \leq I \leq \varepsilon\delta$$

En revanche on montrera que $\varepsilon\delta$ et $\delta\varepsilon$ sont des opérateurs idempotents.

Proposition. Soit δ une dilatation et ε son érosion adjointe. Alors $\delta\varepsilon$ est une ouverture algébrique, appelée OUVERTURE MORPHOLOGIQUE et $\varepsilon\delta$ est une fermeture algébrique, appelée FERMETURE MORPHOLOGIQUE.

Soit δ une dilatation sur le treillis booléen usuel. L'ouverture $\gamma = \delta\varepsilon$ s'exprime alors par :

$$\gamma(X) = \bigcup_{x \in X} \{\delta(x), \delta(x) \subseteq X\} \qquad (50)$$

On peut observer l'analogie avec la définition ensembliste de l'ouverture.

Si ψ est une ouverture algébrique agissant sur un treillis booléen, son application duale $\psi^*(X) = C[\psi(CX)]$ est une fermeture.

3.4.5. Filtres morphologiques

Les filtres morphologiques sont des séquences d'opérateurs morphologiques de base qui ont la propriété d'idempotence.

Définition 3.4.5.1. On appelle composition propre l'application qui à tout opérateur ψ associe l'opérateur $\psi \circ \psi$, noté $\psi\psi$.

La notion d'idempotence $\psi\psi = \psi$ peut se décomposer en deux inégalités :

Définition 3.4.5.2. Soit ψ un opérateur croissant.

L'opérateur ψ est un sous-filtre si $\psi\psi \leq \psi$.

L'opérateur ψ est un sur-filtre si $\psi\psi \geq \psi$.

L'opérateur ψ est un filtre si ψ est idempotent $\psi\psi = \psi$.

Notons qu'il n'y a aucune raison pour que le sup, l'inf ou la composition de deux filtres soit un filtre, cependant :

Théorème 3.4.5.1. (théorème de composition de filtres)

Soit ϕ et ψ deux filtres vérifiant $\phi \geq \psi$. Alors

1. $\phi \geq \phi\psi\phi \geq \phi\psi \vee \psi\phi \geq \phi\psi \wedge \psi\phi \geq \psi\phi\psi \geq \psi$
2. $\phi\psi$, $\psi\phi$, $\phi\psi\phi$ et $\psi\phi\psi$ sont des filtres.
3. $\phi\psi\phi$ est le plus petit filtre supérieur à $\phi\psi \vee \psi\phi$ et $\psi\phi\psi$ le plus grand inférieur à $\phi\psi \vee \psi\phi$.

Démonstration

On commence avec 1.

$$\phi = \phi \Rightarrow \phi\phi \geq \psi\phi \Leftrightarrow \phi \geq \psi\phi. \text{ Mais } \phi \text{ est croissant.} \Rightarrow \phi\phi \geq \phi\psi\phi.$$

En utilisant de nouveau l'idempotence de ϕ on peut écrire: $\phi \geq \phi\psi\phi$
Donc la première inégalité est montrée.

$\psi \leq \phi \Rightarrow \psi\psi \leq \psi\phi \Leftrightarrow \psi \leq \psi\phi$ par l'idempotence de ψ . Donc

$$\psi \leq \psi\phi \leq \phi \Rightarrow \phi\psi \leq \phi\psi\phi \leq \phi\phi \Leftrightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \phi\psi \leq \phi\psi\phi \leq \phi$$

On a obtenu ainsi l'inégalité (1).
Mais:

$$\psi\phi = \psi\phi \Rightarrow \psi\psi\phi \leq \phi\psi\phi \Leftrightarrow \overset{(2)}{\psi\phi \leq \phi\psi\phi}$$

On a obtenu ainsi l'inégalité (2). En utilisant les inégalités (1) et (2) on peut écrire:

$$\phi\psi \vee \psi\phi \leq \phi\psi\phi$$

Donc la deuxième inégalité de 1 est prouvée.

La troisième inégalité est évidente, parce que la borne inférieur doit être plus petite que la borne superieure:

$$\phi\psi \vee \psi\phi \geq \phi\psi \wedge \psi\phi$$

Passons à la quatrième inégalité de 1.

$$\phi \geq \psi \Rightarrow \psi\phi \geq \psi\psi \Leftrightarrow \psi\phi \geq \psi \Rightarrow \phi\psi\phi \geq \phi\psi \quad (3)$$

En même temps:

$$\psi\phi = \psi\phi \Rightarrow \phi\psi\phi \geq \psi\psi\phi = \psi\phi \Leftrightarrow \phi\psi\phi \geq \psi\phi \quad (4)$$

En utilisant les inégalités (3) et (4) on peut écrire:

$$\phi\psi \vee \psi\phi \leq \phi\psi\phi$$

Donc la quatrième inégalité de 1 est prouvée.
Passons à la dernière inégalité de 1.

$$\psi = \psi \Rightarrow \phi\psi \geq \psi\psi \Leftrightarrow \phi\psi \geq \psi \Rightarrow \psi\phi\psi \geq \psi\psi \Leftrightarrow \psi\phi\psi \geq \psi$$

On a finit avec 1. On commence la démonstration de 2.
Pour pouvoir affirmer que $\phi\psi$ est un filtre, il faut montrer que cet opérateur est idempotent.

$$\phi\psi = \phi\psi \Rightarrow \psi\phi\psi \leq \phi\phi\psi = \phi\psi \Rightarrow \phi\psi\phi\psi \leq \phi\phi\psi = \phi\psi$$

Donc:

$$\phi\psi\phi\psi \leq \phi\psi \quad (5)$$

En même temps:

$$\psi = \psi \Rightarrow \phi\psi \geq \psi\psi = \psi \Leftrightarrow \phi\psi \geq \psi \Rightarrow \psi\phi\psi \geq \psi\psi \Leftrightarrow \psi\phi\psi \geq \psi \Rightarrow \phi\psi\phi\psi \geq \phi\psi \quad (6)$$

En utilisant les inégalités (5) et (6) on peut écrire:

$$\phi\psi\phi\psi = \phi\psi$$

Donc l'opérateur $\phi\psi$ est idempotent. Il décrit alors un filtre. On montre maintenant que l'opérateur $\phi\psi\phi$ décrit aussi un filtre.

$$\phi\psi\phi = \phi\psi\phi \Rightarrow \psi\phi\psi\phi \leq \phi\psi\phi \Rightarrow \phi\psi\phi\psi\phi \leq \phi\psi\phi \Leftrightarrow \phi\psi\phi\phi\psi\phi \leq \phi\psi\phi \quad (9)$$

$$\psi\phi = \psi\phi \Rightarrow \phi\psi\phi \geq \psi\phi \Rightarrow \psi\phi\psi\phi \geq \psi\phi \Rightarrow \phi\psi\phi\psi\phi \geq \phi\psi\phi \Leftrightarrow \phi\psi\phi\phi\psi\phi \geq \phi\psi\phi \quad (10)$$

En utilisant les inégalités (9) et (10) on peut écrire:

$$\phi\psi\phi\phi\psi\phi = \phi\psi\phi$$

$\phi\psi\phi$ est un opérateur idempotent. Il décrit donc un filtre. En utilisant la même méthode de démonstration on peut montrer que l'opérateur $\psi\phi\psi$ décrit aussi un filtre.

On commence la démonstration de 3.

Soit f un filtre supérieur à $\phi\psi$ et $\psi\phi$. Alors: $ff = f$

Mais:

$$\left.\begin{array}{l} f \geq \psi\phi \Rightarrow ff \geq f\psi\phi \\ f \geq \phi\psi \end{array}\right\} \Rightarrow ff \geq \phi\psi\psi\phi = \phi\psi\phi$$

Donc:

$$f \geq \phi\psi\phi$$

On a montré ainsi que $\phi\psi\phi$ est le plus petit filtre supérieur à $\phi\psi \vee \psi\phi$.

Soit g un filtre inférieur à $\phi\psi$ et $\psi\phi$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} g = gg \\ g \leq \phi\psi \end{array}\right\} \Rightarrow g = gg \leq g\phi\psi \\ g \leq \psi\phi \end{array}\right\} \Rightarrow g \leq \psi\phi\phi\psi = \psi\phi\psi$$

Donc $\psi\phi\psi$ est le plus grand filtre inférieur à $\phi\psi \vee \psi\phi$.

Si l'on considère la relation d'ordre habituelle $\leq$ sur l'ensemble des filtres, la notion de sup est alors definie par:

Théorème 3.4.5.2. Soit (ψ_i) une famille de filtres. Le plus petit filtre supérieur à $\vee \psi_i$ est le plus grand élément de la classe des transformations croissantes fermée pour le sup et la composition propre engendrée par les (ψ_i).

Démonstration

Soit f un filtre et a une transformation croissante. Alors:

$$f \geq a \Rightarrow f = ff \geq fa \geq aa$$

Si $f \geq a_i$ pour une famille de transformations croissantes a_i on peut écrire:

$$f \geq \vee_i a_i$$

Donc le plus petit filtre majorant $\vee \psi_i$ majore la classe fermée pour le sup et la composition propre engendrée par les ψ_i. Cette classe a un plus grand élément ϕ, son sup qui est croissant. Donc $\phi\phi \leq \phi$. D'autre part cette classe ne contient pas que des
sur-filtres. D'où $\phi\phi = \phi$, ce qui prouve que ϕ est un filtre.

3.4.5.1. Filtres alternés séquentiels

Leur principe est d'iterer des ouvertures et des fermetures de tailles croissantes. Soit (γ_i) une famille d'ouvertures et (ϕ_i) une famille de fermetures vérifiant:

$$i \leq j \Rightarrow \gamma_j \leq \gamma_i \leq I \leq \phi_i$$

Soit les opérateurs m_i, n_i, r_i et s_i définis comme:

$$m_i = \gamma_i\phi_i \; ; n_i = \phi_i\gamma_i \; ; r_i = \phi_i\gamma_i\phi_i \; ; s_i = \gamma_i\phi_i\gamma_i$$

Comme toute ouverture est plus petite que toute fermeture on peut écrire:

$$\gamma_i \leq \phi_i$$

Alors, grâce au théorème 3.4.5.1., on peut affirmer que n_i, m_i, r_i et s_i sont des filtres.
La proposition suivante montre que l'on ne doit pas iterer n'importe comment ces filtres:

Proposition 4.4.1. Soit $(i_k)_{k=1}^{p}$ des entiers strictement positifs tels que $i_k \leq i_1 = i_p$. Alors:

$$m_{i_p} m_{i_{p-1}} ... m_{i_2} m_{i_1} = m_{i_1} = m_{i_p}$$
$$n_{i_p} n_{i_{p-1}} ... n_{i_2} n_{i_1} = n_{i_1} = n_{i_p}$$

Une démonstration pour cette proposition peut être trouvée dans [Sch., Mat.'94].

Les filtres alternés séquentiels sont définis par les itérations suivantes:

$$M_i = m_i m_{i-1} ... m_2 m_1$$
$$N_i = n_i n_{i-1} ... n_2 n_1$$
$$R_i = r_i r_{i-1} ... r_2 r_1$$
$$S_i = s_i s_{i-1} ... s_2 s_1$$

Nous avons en particulier les relations suivantes:

$$R_i = \phi_i M_i \text{ et } S_i = \gamma_i N_i$$

Ces filtres jouissent de très nombreuses propriétés. Voici quelques relations concernant leurs compositions. Pour $i \leq j$:

$$M_j M_i = M_j \leq M_i M_j \qquad R_i R_j \leq R_j = R_j R_i$$
$$S_j S_i = S_j \leq S_i S_j \qquad N_i N_j \leq N_j = N_j N_i$$

On peut maintenant se demander ce qui se passe si l'on itere les m_i en ordre décroissant. Cela définit les filtres séquentiels transposés:

$$M_i^t = m_1 m_2 \ldots m_{i-1} m_i \qquad R_i^t = r_1 r_2 \ldots r_{i-1} r_i$$
$$N_i^t = n_1 n_2 \ldots n_{i-1} n_i \qquad S_i^t = s_1 s_2 \ldots s_{i-1} s_i$$

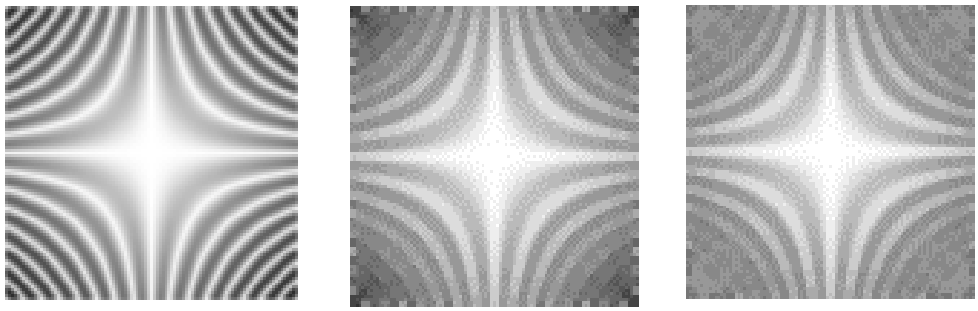
Ils ont des propriétés analogues aux filtres alternés séquentiels. Si l'on veut qu'un bon nombre des inégalités entre filtres deviennent des égalités, on utilise les filtres alternés séquentiels symétriques:

$$\tilde{M}_i = M_i^t M_i \;\; ; \;\; \tilde{R}_i = R_i^t R_i \;\; ; \;\; \tilde{N}_i = N_i^t N_i \;\; ; \;\; \tilde{S}_i = S_i^t S_i$$

Ces quatre filtres ont la propriété:

$$\tilde{M}_i \tilde{M}_j = \tilde{M}_j \tilde{M}_i = \tilde{M}_{\sup(i,j)}$$

Dans la figure suivante on présente deux exemples d'utilisation des filtres alternés séquentiels.



a) L'image originale.

b) L'image obtenue par l'utilisation d'un filtre ouverture-fermeture.

c) L'image obtenue par l'utilisation d'un filtre fermeture-ouverture.

Figure 4.4.1. Deux exemples d'utilisation des filtres sequentiels.

Dans les deux exemples nous avons utilisé des éléments structurants carrés de dimension 1.

4. Opérateurs morphologiques de segmentation

La segmentation est l'une des méthodes de traitement de l'image les plus importantes. Elle prépare l'image pour son analyse et pour la reconnaissance des objets qu'elle contient. La segmentation de l'image signifie: le partage de l'image en zones homogènes selon certains critères. Donc c'est une opération indispensable pour la reconnaissance des objets qui composent l'image.

Les critères évoqués plus haut sont toujours très généraux tels que la variation de luminance à l'intérieur d'une zone ou le contraste fort aux frontières.

La segmentation morphologique se propose d'aller plus loin dans la reconnaissance en ISOLANT DIRECTEMENT L'OBJET QUE L'ON VEUT ETUDIER, en éliminant tout ce qui pourrait gêner la reconnaissance. La morphologie mathématique permet de faire ça en termes géométriques, par le choix de la suite des opérateurs que l'on appliquera et le réglage des paramètres associés (nombres et éléments structurants).

Parmi les opérateurs de segmentation les opérateurs de squeletisation ont une position privilégiée.

4.1. Squelettes

Avec le squelette nous abordons des transformations morphologiques plus complexes, dans le sens où elles sont composées de nombreux opérateurs de base.

Le squelette de l'objet G, parfois appelé AXE MEDIAN, peut être défini de nombreuses manières qui d'ailleurs ne conduisent pas toujours au même objet: seules des conditions de régularité des formes feront disparaître les différences.

Soit B(x,r) la boule fermée de centre x et de rayon r et $\overset{\circ}{B}(x,r)$ la boule ouverte correspondante (l'intérieur de la boule fermée B(x,r)).

Definition Soit X un ensemble du plan. La boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ (resp. fermée B(x,r)) est maximale dans X si et seulement si:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\circ}{B}(x,r) \subset \overset{\circ}{B}(x',r') \subset X \\ \text{ou} \\ B(x,r) \subset B(x',r') \subset X \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = x' \text{ et } r = r'$$

Definition Le squelette de l'ensemble X est le lieu des centres des boules ouverts maximales dans X.

Prenons deux exemples.

E1. On cherche le squelette d'un carré, comme celui-ci présenté dans la figure 4.1.1.

Dans ce cas les boules B(x,r) sont des cercles.
Quelques boules maximales sont présentées dans la figure 4.1.2.
Le lieu des centres des boules ouverts maximales dans l'image considérée est présenté dans la figure 4.1.3.

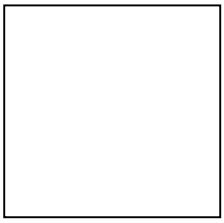


Figure 4.1.1. L'image à traiter.

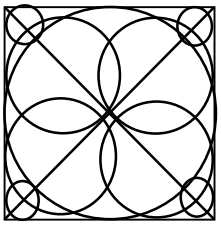


Figure 4.1.2. Les centres des cercles présentés sont des points qui appartient au squelette du carré.

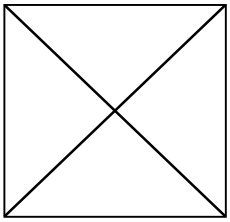


Figure 4.1.3. Le squelette de l'image présentée dans la figure 4.1.1.

E2. On cherche le squelette d'un rectangle, comme celui-ci présenté dans la figure 4.1.4.

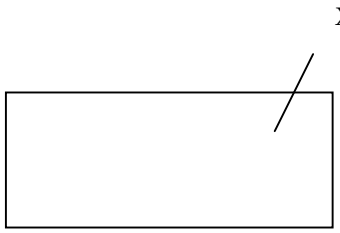


Figure 4.1.4. L'image à squeletiser dans l'exemple 2.

Quelques boules maximales pour cet exemple sont présentées dans la figure 4.1.5.

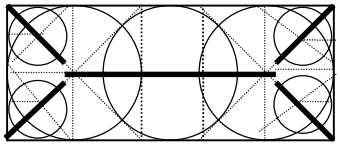


Figure 4.1.5. Quelques cercles qui ont les centres sur le squelette du rectangle de la figure 4.1.4

La réunion des points présentés dans la figure 5 donne le squelette de l'ensemble X, présenté dans la figure 4.1.6.

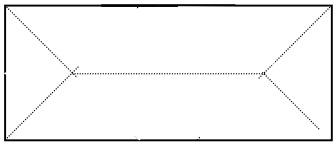


Figure 4.1.6. Le squelette de l'image présentée dans la figure 4.1.4

En utilisant les résultats obtenus dans ces deux exemples on peut démontrer que l'opérateur squelette n'est pas semicontinue. Considérons à ce but qu'on a deux carrés qui tendent l'un vers l'autre comme on peut voir dans la figure 4.1.7 a). Le cas quand les deux carrés se tachent est présenté dans la figure 4.1.7 b). Le rectangle obtenu ainsi est présenté dans la figure 4.1.7 c). Le squelette de deux carrés ne tende pas vers le squelette du rectangle. Donc le squelette n'est pas un opérateur continu.

Figure 4.1.7. Un contre-exemple de la semicontinuitée du squelette; a) deux carrés qui tendent un vers l'autre; b) le cas quand les deux carrés se touchent; c) le rectangle obtenu ainsi; d) le squelette de deux carrés, e) le squelette du rectangle.

Donc le squelette n'est pas un opérateur semicontinue. Pour éviter ces inconvénients il est nécessaire d'utiliser des notions topologiques pour la définition du squelette.

4.1.1 Formule de Lantuéjoul

Nous allons d'abord étudier une formule décrivant le squelette au moyen d'érosions et de dilatations, puis montrer dans quelle mesure il est possible de reconstruire un ensemble à partir de son squelette.

Soit G un sous-ensemble ouvert du plan et notons:

$$G_r = G \div B(r)$$

et:

$$F_r = G \div \overset{\circ}{B}(r)$$

Alors, nous avons les relations:

$$\overset{\circ}{B}(x,r) \subset G \Leftrightarrow x \in F_r \qquad (51)$$

$$\overset{\circ}{B}(y,r+\varepsilon) \subset G \Leftrightarrow B(y,\varepsilon) \subset F_r \qquad (52)$$

$$\overset{\circ}{B}(x,r) \subset \overset{\circ}{B}(y,r+\varepsilon) \Leftrightarrow x \in B(y,\varepsilon) \qquad (53)$$

Démonstration.

$$F_r = G \div \overset{\circ}{B}(r) = \left\{ u, \overset{\circ}{B}(u,r) \subset G \right\} \Rightarrow x \in F_r \Leftrightarrow \overset{\circ}{B}(x,r) \subset G$$

et la relation (51) est démontrée.

$$B(y,\varepsilon) \subset F_r \Leftrightarrow B(y,\varepsilon) \subset \left\{ u, \overset{\circ}{B}(u,r) \subset G \right\}$$

Pour chaque y et e les points intérieurs de la sphère de centre y et de rayon,ε, peuvent être des centres d'une sphère de rayon r contenue dans G.
Prenons le cas présenté dans la figure 4.1.1.1.

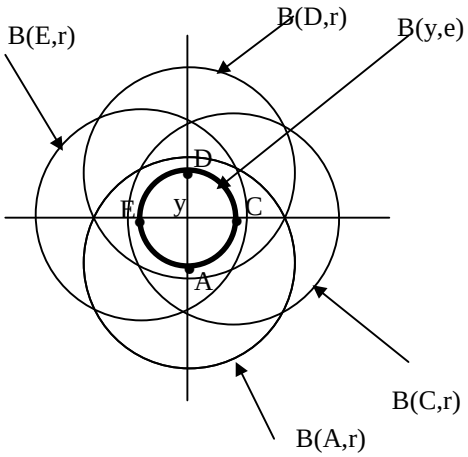


Figure 4.1.1.1. Quelques sphères de rayon r aux centres situés sur la sphère de centre y et de rayon r.

Soient les points A, E, C et D les centres des sphères de rayon r inclues dans G, construites aux centres intérieurs à la sphère B(y,e). Alors:

$$\overset{\circ}{B}(A,r) \cup \overset{\circ}{B}(C,r) \cup \overset{\circ}{B}(D,r) \cup \overset{\circ}{B}(E,r) \subset G$$

Pratiquement la sphère de centre n'importe quel point de la superficie de la sphère B(y,e) et de rayon r, B(s,r) est inclue dans G. Donc:

$$\bigcup_s B(s,r) \subset G$$

Mais la sphère de centre y et rayon r+e est inclue dans $\bigcup_s B(s,r)$. Donc:

$$\overset{\circ}{B}(y, r+\varepsilon) \subset G \qquad \text{(c.q.f.d).}$$

La relation (52) est vérifiée.

Supposons maintenant que:

$$\overset{\circ}{B}(x, r) \subset \overset{\circ}{B}(y, r + \varepsilon)$$

Prenons le cas présenté dans la figure 4.1.1.2.

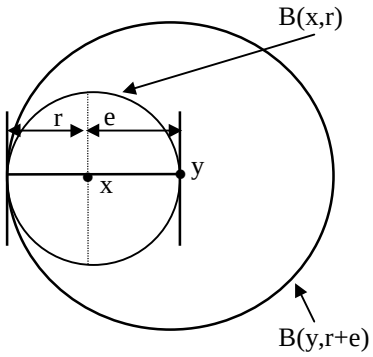


Figure 4.1.1.2. Exemple de sphères qui vérifient la condition d'inclusion $\overset{\circ}{B}(x, r) \subset \overset{\circ}{B}(y, r + \varepsilon)$.

On constate que la condition d'inclusion conduit à:

$$y - x \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \geq y - \varepsilon \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{B}(y, \varepsilon)$$

et la relation (53) est vérifiée.

Un point x est centre d'une boule maximale de rayon r si et seulement si $x \in F_r$ et x n'appartient pas à aucune ouverture de F_r réalisée à l'aide d'un élément structurant de type sphérique. En effet:

Parce que x est le centre d'une boule maximale de rayon r, on peut écrire la relation:

$$\overset{\circ}{B}(x, r) \subset G$$

ou, tenant compte de la relation (51) on peut affirmer que:

$$x \in F_r \tag{54}$$

D'autre part, on présente un exemple dans la figure 4.1.1.3.

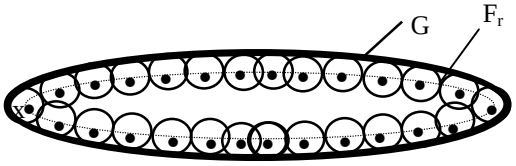


Figure 4.1.1.3. Un exemple d'ensembles G et F_r.

On observe que le point x est sur la frontière de l'ensemble F_r. Donc il n'appartient pas à l'intérieur de l'ensemble F_r.

$$x \notin F_r$$

Mais l'ouverture est un opérateur anti-extensif. Donc pour chaque e positif on peut écrire:

$$(F_r)_{B(\varepsilon)} \subset F_r \Leftrightarrow (F_r)_{B(\varepsilon)} \subset \overset{\circ}{F}_r$$

Voilà pourquoi on peut écrire:

$$x \notin (F_r)_{B(\varepsilon)}$$

ou:

$$x \in F_r \setminus (F_r)_{B(\varepsilon)}$$

On peut affirmer que:

$$x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_r \setminus (F_r)_{B(\varepsilon)}\right) \tag{55}$$

Si on note avec s_r l'ensemble des centres de boules maximales de rayon r on peut écrire:

$$s_r(G) = \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_r \setminus (F_r)_{B(\varepsilon)}\right) \tag{56}$$

Donc, tenant compte de sa définition, le squelette de G, noté Sq(G), vaut:

$$Sq(G) = \bigcup_{r>0} \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_r \setminus (F_r)_{B(\varepsilon)}\right) \tag{57}$$

Cette formule a été établie par Lantuéjoul dans sa thèse de doctorat [Lan.'78]. Elle nous permet de calculer le squelette d'un ensemble à l'aide de l'érosion (pour le calcul du F_r) et de la dilatation (pour calculer l'ouverture il faut calculer une érosion et une dilatation).

4.1.2 Squelette de l'erodé

On calcule le squelette de l'erodé d'un ensemble en utilisant le squelette de l'ensemble. Pour le commencement on démontre la relation suivante:

$$F_{r+a} = G_a \div \overset{\circ}{B}(r) \tag{58}$$

où G_a signifie l'erodé de taille a de l'ensemble G.

Démonstration

$$F_{r+a} = G \div \overset{\circ}{B}(r+a) = \left\{ u \,\middle|\, \overset{\circ}{B}(u, r+a) \subset G \right\}$$

$$G_a = \left\{ u \left| \overset{\circ}{B}(u,a) \subset G \right. \right\}$$

$$G_a \div \overset{\circ}{B}_r = \left\{ u \left| \overset{\circ}{B}(u,r) \in G_a \right. \right\} = \left\{ u \left| \overset{\circ}{B}(u,r) \subset \left\{ \overset{\circ}{B}(v,a) \subset G \right\} \right. \right\} = \left\{ u \left| \overset{\circ}{B}(u,r+a) \subset G \right. \right\}$$

Donc la relation (58) est démontrée. Voilà pourquoi on peut écrire, en utilisant la relation (56):

$$s_r(G_a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_{r+a} \setminus (F_{r+a})_{B(\varepsilon)} \right)$$

En même temps :

$$s_{r+a}(G) = \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_{r+a} \setminus (F_{r+a})_{B(\varepsilon)} \right)$$

On a démontre ainsi que:

$$s_r(G_a) = s_{r+a}(G) \tag{59}$$

ou, en d'autres termes :

$$Sq(G_a) = \bigcup_{r>0} s_r(G_a) = \bigcup_{r>0} s_{r+a}(G) = \bigcup_{r>0} \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_{r+a} \setminus (F_{r+a})_{B(\varepsilon)} \right) \tag{60}$$

Cette formule s'interprète en disant que le squelette de l'erodé de taille a est l'ensemble des centres des disques maximaux de G de taille au moins a.

Il n'y a aucune formule analogue pour le squelette du dilaté, de l'ouvert ou du fermé.

4.1.3. Formules de reconstruction

Tout point x de G est inclus dans une boule ouverte de rayon non nul, car G est ouvert. Il existe donc une boule ouverte maximale qui contient x. Donc:

$$G = \bigcup_{r>0} s_r(G) \oplus \overset{\circ}{B}(r) \tag{61}$$

En d'autres termes, la connaissance du squelette de G et de la taille des boules maximales

permet de reconstruire G. Cette formule reste à la base d'algorithmes de codage de formes binaires. Pour la reconstruction de l'erodé d'un ensemble on peut utiliser la formule analogue:

$$G_a = \bigcup_{r>a} s_r(G) \oplus \overset{\circ}{B}(r-a) \tag{62}$$

Comme la dilatation commute avec l'union, on peut aussi reconstruire le dilaté et l'ouvert d'un ensemble en partant de son squelette:

$$G \oplus \overset{\circ}{B}(a) = \left(\bigcup_{r>0} s_r(G) \oplus B(r) \right) \oplus \overset{\circ}{B}(a) = \left(\bigcup_{r>0} s_r(G) \right) \oplus \overset{\circ}{B}(r) \oplus \overset{\circ}{B}(a) = \left(\bigcup_{r>0} s_r(G) \right) \oplus \overset{\circ}{B}(r+a)$$

On a démontré que:

$$G \oplus \overset{\circ}{B}(a) = \bigcup_{r>0} s_r(G) \oplus \overset{\circ}{B}(r+a) \tag{63}$$

$$G_{B(a)} = (G \div B(a)) \oplus B(a) = G_a \oplus B(a) \overset{(63)}{=} \bigcup_{r>0} s_r(G_a) \oplus \overset{\circ}{B}(r+a) =$$

$$= \bigcup_{r>0} s_r(G_a) \oplus \overset{\circ}{B}(r+a) = \bigcup_{r>0} s_{r+a}(G) \oplus \overset{\circ}{B}(r+a)$$

En utilisant le changement de variable:

$$R = r + a$$

on peut écrire:

$$G_{B(a)} = \bigcup_{R>a} s_R(G) \oplus \overset{\circ}{B}(R) \tag{64}$$

La dernière relation représente la formule de reconstruction du fermeture de l'ensemble G en utilisant le squelette de l'ensemble G.

Notons cependant que les formules de reconstruction n'impliquent pas que le squelette du dilaté ou de l'ouvert se déduise de celui de l'ensemble de départ.

4.1.4. Propriétés mathématiques du squelette

On présente dans la suite quelques propriétés mathématiques de l'opérateur morphologique de squeletisation.

P4.1.4.1. (semicontinuitée inférieur)

L'application $G \to \overline{Sq(G)}$ est s.c.i.

Démonstration

Soit G_n une suite d'ouverts convergente vers G. Montrer la s.c.i. de cette opération revient à montrer que:

$$\liminf_n \overline{Sq(G)} \supset \overline{Sq(G)} \Leftrightarrow (\forall) x \in Sq(G), (\exists)\, x_n \in \overline{Sq(G_n)}, x_n \to x$$

Nous trouverons en fait une suite $x_n \in \overline{Sq(G_n)}$ convergente vers x.

Soit $\overset{\circ}{B}(x,r)$ une boule maximale dans G. Notons:

$$B_n = \overset{\circ}{B}\left(x, r - \frac{1}{n}\right)$$

On a:

$$B_n \subset G$$

Donc, il existe un nombre N_n, tel que:

$$B_n \subset G_p, \text{pour } p \geq N_n$$

Notons:

$$D_p = B_n \text{ pour } N_n \leq p < N_{n+1}$$

Alors:

$$D_p \subset G_p$$

Soit M_p une boule maximale dans G_p qui contienne D_p:

$$D_p \subset M_p \subset G_p$$

En passant à la limite pour une sous-suite M_p qui converge vers M, on peut écrire:

$$\overset{\circ}{B}(x,r) \subset M \subset G$$

Mais la suite M_p n'a pas qu'une seule valeur d'adhérence, donc M_p converge vers $\overset{\circ}{B}(x,r)$. Donc M est maximale dans G et vaut $\overset{\circ}{B}(x,r)$. On en déduit que x_p, le centre du M_p, converge vers x, ce qui achève la démonstration.

Il y a une relation très intéressante entre le squelette et la fonction distance.

Definition On appelle fonction distance sur G la fonction:

$$\rho_G(x) = d(x, C(G)) = \min\{d(x, y), y \in C(G)\}$$

Cette fonction représente donc la plus petite distance entre le point x et un point y (d(x,y)) qui se trouve dans l'ensemble G.

Definition On appelle fonction d'étanchéité la restriction de ρ_G à $Sq(G)$, que l'on notera encore ρ_G par abus de notation.

On présente un exemple dans la figure 4.1.4.1.

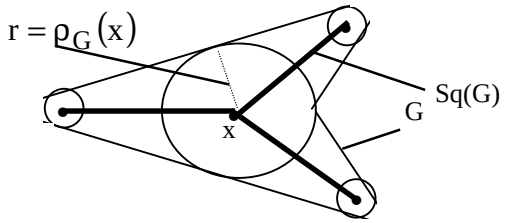


Figure 4.1.4.1. Un exemple où la fonction de distance et la fonction d'étanchéité se confonde.

Definition Pour tout point $x \in G$, on définit:

l'amont de x: $Am(x) = \{y | \rho_G(y) = \rho_G(x) + d(x, y)\}$

l'aval de x: $Av(x) = \{y | \rho_G(y) = \rho_G(x) - d(x, y)\}$

l'arête de x: $Ar(x) = Av(x) \cup Am(x)$

Dans la figure suivante on donne des exemples pour les notions introduites dans la dernière définition.

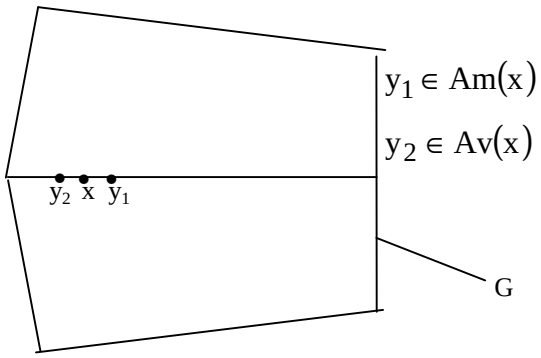


Figure 4.1.4.2. Eléments des ensembles Am(x), Av(x) et Ar(x).

Ces objets sont des segments ou unions de segments dont quelques propriétés seront présentées dans la suite.

Proposition 4.1.4.2 Soit $x \in G$.

L'amont de x est un unique segment, éventuellement réduit au point x.

L'aval de x est composé de un ou plusieurs segments dont l'une des extrémités est x. Soit P_x l'ensemble des points de C(G) qui réalisent la distance de x à C(G) (pour tout $y \in P_x, d(x,y) = \rho_G(x)$). Alors l'aval de x est: $\bigcup_{y \in P_x} (x,y)$.

Démonstration

Soit y un élément de l'ensemble Am(x). Alors:

$$\rho_G(y) = \rho_G(x) + d(x,y)$$

où :

$$\rho_G(y) = \min_{u \in C(G)} \{d(y,u)\} \text{ et } \rho_G(x) = \min_{u \in C(G)} \{d(x,u)\}$$

On peut donc écrire:

$$\rho_G(x) + d(x,y) = \min \{d(x,u), u \in C(G)\} + d(x,y) = d(x,u_0) + d(x,y)$$

Si les points x,y et u_0 sont disposés comme on peut voir dans la figure 4.1.4.3 on peut écrire:

$$d(x,u_0) + d(x,y) = d(y,u_0)$$

pour chaque y situé sur la droite qui passe par les points x et u_0.

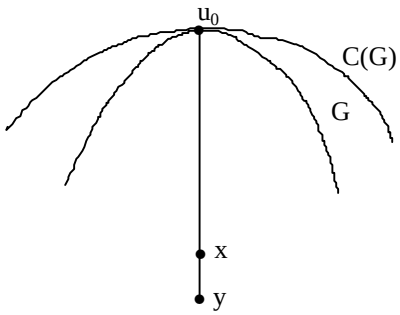


Figure 4.1.4.3. Un exemple.

Donc, la relation:

$$\rho_G(y) = \rho_G(x) + d(x,y)$$

est satisfaite.

En conséquence on peut affirmer que l'ensemble Am(x) est le segment qui commence en x et qui s'étend dans la direction opposée du point u_0 sur la droite

qui passe par les points u_0 et x. Donc la proposition est vraie. On peut raisonner d'une manière similaire pour l'affirmation liée de l'aval.

La proposition suivante montre comment on peut définir le squelette au moyen de l'amont.

Proposition 4.1.4.3. L'amont d'un point $x \in G$ est un segment [x,y] tel que:

1. $y \in Sq(G)$
2. Sq(G) est l'ensemble des points dont l'amont est réduit à un point.

Démonstration

Soit $x \in G$ et Am(x)=[x,y], $x \neq y$. Les deux boules ouvertes $\overset{\circ}{B}(x, \rho_G(x))$ et $\overset{\circ}{B}(y, \rho_G(y))$ sont tangentes, car:

$$\rho_G(y) = \rho_G(x) + d(x,y)$$

Leur point de contact appartient à C(G). Donc toute boule B(z) contenant $\overset{\circ}{B}(y, \rho_G(y))$, inclue en G, et tangente au même point, a la propriété:

$$\rho_G(z) = \rho_G(x) + d(x,z), \text{ avec } d(x,z) > d(x,y)$$

Pour que:

$$z \in Am(x)$$

il est nécessaire que:

$$z=y$$

Donc la boule $\overset{\circ}{B}(y, \rho_G(y))$ est maximale dans G. Ainsi $y \in Sq(G)$ et la propriété 1 est démontrée.
Si l'amont d'un point est réduit à ce point, il est un point du squelette. A l'inverse, l'amont du centre d'une boule maximale ne peut être que réduit à un point, ce qui prouve la deuxième partie de la proposition.

En résumé: Deux arrêts non identiques sont disjoint ou se coupent en un point x du squelette qui est leur commune extrémité amont. En ce qui concerne l'aval les choses sont moins simples.

Definition On appelle point simple, un point dont l'aval est réduit à un seul segment. Les points multiples sont les points dont l'aval possède plusieurs segments. L'ensemble de points multiples est noté D(G). On a :

$$D(G) \subset Sq(G) \qquad (65)$$

car si (y,x] est un segment maximal de l'aval de x , alors $y \in C(G)$.

Si l'aval de x est constitué de plusieurs segments, le minimum de la distance à C(G) est atteint en plusieurs points, ce qui implique que l'amont de x est réduit à un point, donc x est un point du squelette. Donc, chaque point multiple est un point du squelette, et la dernière relation est prouvée. Malheureusement, tout point du squelette n'est pas multiple, comme le montre le cas de l'extrémité du squelette d'une ellipse, présenté dans la figure 4.1.4.4. L'aval de point x se réduit à ce point. Donc x est un point simple. Voilà pourquoi l'ensemble D(G) n'est pas identique au squelette Sq(G). On peut cependant montrer que les points simples du squelette sont rares, parce que:

$$\overline{D(G)} = \overline{Sq(G)}$$

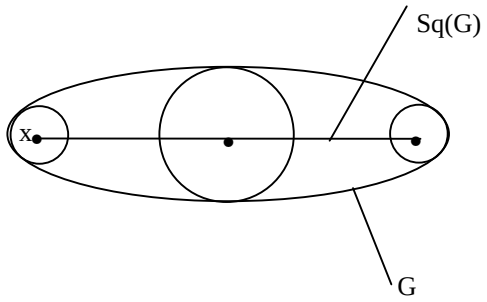


Figure 4.1.4.4. Un exemple de point dont l'aval est réduit à un seul point.

Dans la figure 4.1.4.5. sont présentées différents points représentatifs d'un squelette.

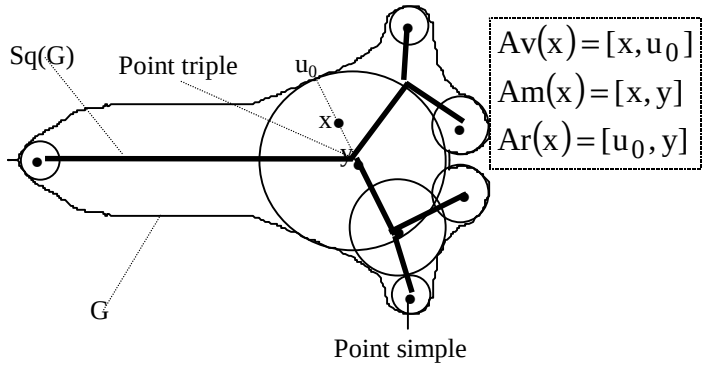


Figure 4.1.4.5. Amont, aval, arête d'un point ainsi que differents points remarquables du squelette.

Jusqu'ici on a étudié seulement des propriétés géométriques du squelette. On présente dans la suite, sans preuve, quelques propriétés topologiques.

Proposition 4.1.4.4. En tout point de l'ouvert $G \setminus Sq(G)$, la fonction distance sur G est differetiable et son gradient est le vecteur unité orienté selon l'amont de x.

Proposition 4.1.4.5. La fonction distance sur G n'est pas differentiable sur D(G), ensemble des points multiples de Sq(G).

Théorème 4.1.4.6. L'adhérence du squelette est le complémentaire du plus grand ouvert de G où ρ_G est differentiable.

En regardant les squelettes de différents ensembles on peut observer leur ressemblance avec des graphes. Voilà pourquoi dans la suite, on étudie cette ressemblance.

Definition Un graphe est une union de courbes simples qui ne peuvent pas s'interrsecter qu'en leurs extrémités. Les courbes simples sont appelées arêtes et leurs extrémités sommets.

Definition. Un graphe est de type fini si:

1. Le nombre d'arêtes incidents à un sommet est fini;
2. L'ensemble des sommets est isolé.

On rappelle que:
Un ensemble A est isolé si pour tout compact K, $K \cap A$ est composé d'un nombre fini de points.
Si l'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires, le squelette n'a pas de structure de graphe. Dans la figure suivante on présente l'effet de la squeletisation sur une image.

Figure 4.1.4.6. Un exemple de squeletisation. L'image originale est celle de gauche. Son squelette est présenté dans l'image de droite.

4.2. Squelette par zones d'influence

Considérons X_i des ensembles compacts en nombre localement fini. Ca veut dire que tout domaine borné ne coupe qu'un nombre fini des X_i. Soit $X = \bigcup_i X_i$. Le squelette de l'ensemble C(X) motive une nouvelle notion.

Définition Soit X une population d'objets compacts disjoints deux à deux. La zone d'influence $iz(X_i)$ associée à X_i, est l'ensemble des points plus proches de X_i que des autres objets:

$$iz(X_i) = \{x | d(x, X_i) < d(x, X \setminus X_i)\} \tag{66}$$

Le squelette par zones d'influence, Skiz, est l'ensemble des points qui n'appartient à aucune zone d'influence:

$$Skiz(X) = C(IZ(X)) \text{ avec } IZ(X) = \bigcup_i iz(X_i) \tag{67}$$

En d'autres termes la boule de centre $z \in Skiz(X)$et de rayon $d(z, X_i)$ est maximale dans C(X).

Démonstration

Soit:

$$_i d_z = d(z, X_i)$$

Pour le commencement on prouve que $B(z,_i d_z) \in C(X)$

$$z \in Skiz(X) \Rightarrow z \notin IZ(X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \notin \bigcup_i iz(X_i) \Leftrightarrow d(z, X_i) > d(z, X \setminus X_i), (\forall) i \Leftrightarrow d(z, X_i) > d(z, X \cap C(X_i)), (\forall) i$$

Supposons que $z \in X_i$. Alors $d(z, X_i) = 0$ et la dernière relation devienne:

$$d(z, X \cap C(X_i)) < 0$$

C'est absurde, parce que la distance est une quantité positive. On a montré ainsi que le point z, du Skiz(X) ne peut pas être inclus dans X_i pour aucun i. Donc les points du Skiz(X) n'appartiennent pas à l'ensemble X. Donc:

$$z \notin X \Leftrightarrow z \in C(X)$$

La distance entre le point z et l'ensemble X vaut:

$$d(z, X) = \min_i \{d(z, X_i)\} = \min_i \{_i d_z\}$$

Donc les points de la boule de centre z et de rayon $\min_i \{_i d_z\}$ sont à l'intérieur de l'ensemble C(X). On a montré ainsi que toutes les boules de centre z et de rayon $d(z, X_i)$ sont dans C(X). Si on prend une boule de centre z et de rayon r tel que:

$$r > \min_i \{_i d_z\}$$

alors:

$$B(z, r) \cap X \neq \Phi$$

Donc la boule $B\left(z, \min_i \{d_z\}\right)$ est maximale dans C(X).

Nous sommes donc en présence d'un sous-ensemble du squelette de C(X), qui est généralement strictement plus petit: En effet, les boules maximales qui ne touchent qu'une seule composante X_i sont dans le squelette de C(X) et non pas dans le Skiz (voir figure 4.2.1).

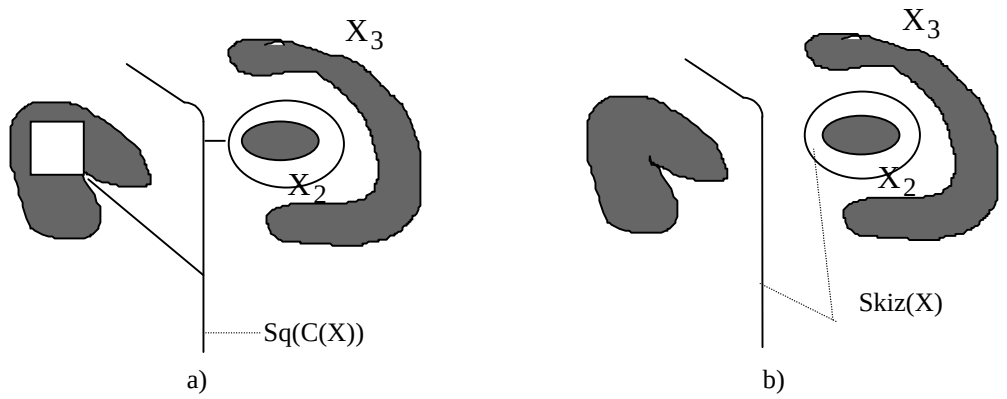


Figure 4.2.1. Différence entre le Skiz et le squelette du complémentaire. a) Le squelette de C(X), b) Le Skiz de X.

Dans le cas où les X_i sont des points, le Skiz est appelé DIAGRAME DE VORONOI.

4.2.1. Le Skiz est un graphe

Le Skiz est un graphe sous des hypothèses bien plus générales que celles pour lesquelles le squelette en est un.

Théorème 4.2.1. Dans le plan, soit $X = \bigcup_i X_i$ une union localement finie de compacts deux à deux disjoints. Alors le Skiz de X est un graphe de type fini.

Démonstration. Considérons l'ensemble Y dont le complémentaire est:

$$C(Y) = \bigcup \left\{ \overset{\circ}{B}\left(x, \rho_{C(X)}\right), x \in \mathrm{Skiz}(X) \right\} \qquad (68)$$

où $\rho_{C(X)}$ est la fonction distance sur C(X), donc la distance des points de C(X) à X. Cet ensemble est un ouvert C(Y), éventuellement plus petit que C(X). Son complémentaire Y est encore une union localement finie de compacts, chacun contenant un X_i. Ainsi le Skiz de Y est égal à celui de X. Dans [Sch.,Mat.'94] est montré que Sq(Y) est un graphe de type fini.
On éloigne de ce graphe les arêtes correspondant à des boules maximales touchant un seul X_i. Nous obtenons le Skiz de X, sous-graphe de Sq(Y), qui reste un graphe de type fini.

Enfin, l'une des différences majeurs avec le squelette est que le Skiz ne peut pas avoir des points terminaux. En effet, un point terminal correspondrait à une boule maximale qui ne toucherait qu'un seul des X_i, ce qui par définition du Skiz est impossible.

On présente dans la figure 4.2.1.1. l'effet de l'opérateur Skiz sur une image.

a) b)

Figure 4.2.1.1. Traitement par Skiz. a) L'image originale; b) L'effet de la transformation.

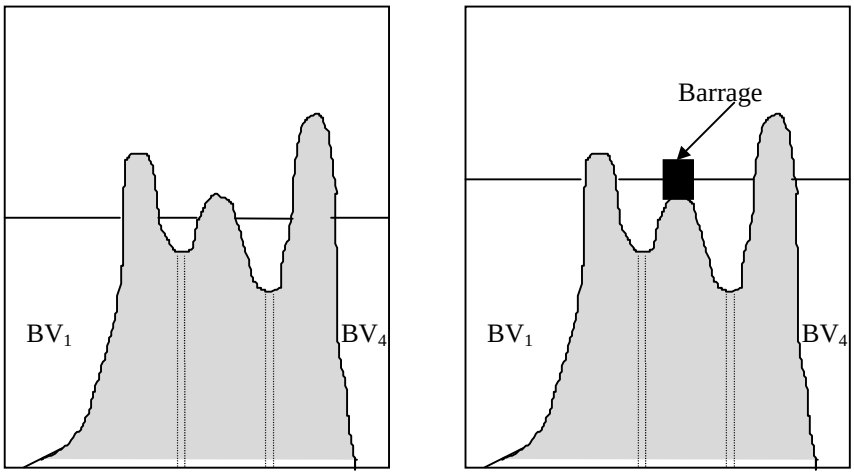
4.3. Ligne de partage des eaux

L'une des idées pour segmenter les images est de déterminer les lignes le long desquelles les niveaux de gris varient rapidement. Ces lignes représentent les contours des objets. On peut donc les modéliser par les lignes de crête du module du gradient de l'image. Géographiquement, la notion de ligne de crête ne semble poser aucun problème: une ligne de crête est une ligne joignant les points les plus élevés d'un terrain. C'est la ligne de partage des eaux.
Cependant, lorsque l'on veut traduire en termes mathématiques le concept de ligne de crête, on se rend compte qu'il y a plusieurs manières de le faire: maxima locaux du module du gradient dans la direction du gradient, zéros du Laplacian, attracteurs des minima, pour n'en citer que quelques unes. Chacune de ces définitions donne naissance à des objets qui sont, bien sur, différents. La morphologie mathématique est partie de la notion d'attracteur des minima, c'est à dire qu'à tout minimum sera associé la zone géographique d'où une goutte d'eau, suivant la ligne de plus grande pente, arrivera dans ce minimum. Le complémentaire des attracteurs est donc bien une **ligne de partage des eaux** ou **lpe**.

4.3.1. Approche par immersion

Cette approche suppose que l'image que nous étudions est une fonction en escalier: $f : R^n \rightarrow N$. Nous verrons alors comment passer à la limite et calculer la ligne de partage des eaux d'une fonction assez régulière.

Nous appellerons plateaux de f l'ensemble des points au voisinage desquels f est constante. Rendre alors mathématique la notion d'une goutte d'eau qui descend selon la ligne de plus grande pente jusqu'à un minimum régional est délicat sur les fonctions en escalier: sur un plateau, la pente est nulle. Le moyen le plus simple pour contourner cette difficulté est de procéder en immergeant progressivement dans l'eau la fonction f par le bas. Pour que l'eau monte partout de manière régulière, on supposera que les minima régionaux sont "percés" comme la montre la figure 4.3.1.1. Passant par les ouvertures que l'on a créées, l'eau progresse alors dans les bassins correspondant à chaque minimum (fig. 4.3.1.1. a)). Lorsque deux eaux en provenance de minima différents se rencontrent, on place un barrage, de telle sorte que deux eaux différents ne se mélangent pas (fig.4.3.1.1.b)). La ligne de partage des eaux est constituée par l'ensemble de ces barrages. Elle partage l'image en différentes zones, que l'on peut considérer comme les zones d'influence ou d'attraction des minima régionaux. On appelle ces zones les bassins versants de l'image.



a) Altitude h. b) Altitude h+Δ

Figure 4.3.1.1. Construction de ligne de partage des eaux pour une fonction monodimensionelle.

En dimension un, le lieu des barrages se calcule naturellement. Ils sont localisés sur les maxima locaux de l'image. En dimension deux, il est beaucoup plus délicat de caractériser ces barrages directement. Comme les barrages sont les frontières des bassins versants, ce sont des lignes. Ces lignes contiennent bien plus que les maxima locaux.

Travaillant sur une fonction en escalier, le contact entre deux eaux provenant de deux bassins différents s'effectue sur un plateau. On suppose alors que cette rencontre a lieu au milieu de ces plateaux. Pour calculer le milieu sur les plateaux, on utilisera le squelette par zones d'influence. Nous avons maintenant toutes les idées pour poser de manière formelle:

Définition. Soit $f : R^n \to N$ une fonction en escalier que nous supposerons bornée. Notons:

1. $h_{min} = \inf(f(x))$ et $h_{max} = \sup(f(x))$,
2. f^h la section inferieure de f au niveau $h : f^h = \{x, f(x) \le h\}$,
3. $Reg\_Min_k(f)$ l'ensemble des **bassins versants** de f et l'ensemble $X_{h_{max}}$ obtenu après la récurrence suivante:

   (i) $X_{h_{min}} = f^{h_{min}}$,

   (ii) $X_{h+1} = Reg\_Min_{h+1}(f) \cup IZ_{f^{h+1}}(X_k), (\forall) h \in [h_{min}, h_{max} - 1]$

où $IZ_A(B)$ est l'union des zones d'influence de B dans A. La ligne de partage des eaux de f est alors le complémentaire de X_{max} (figure 4.3.1.2).

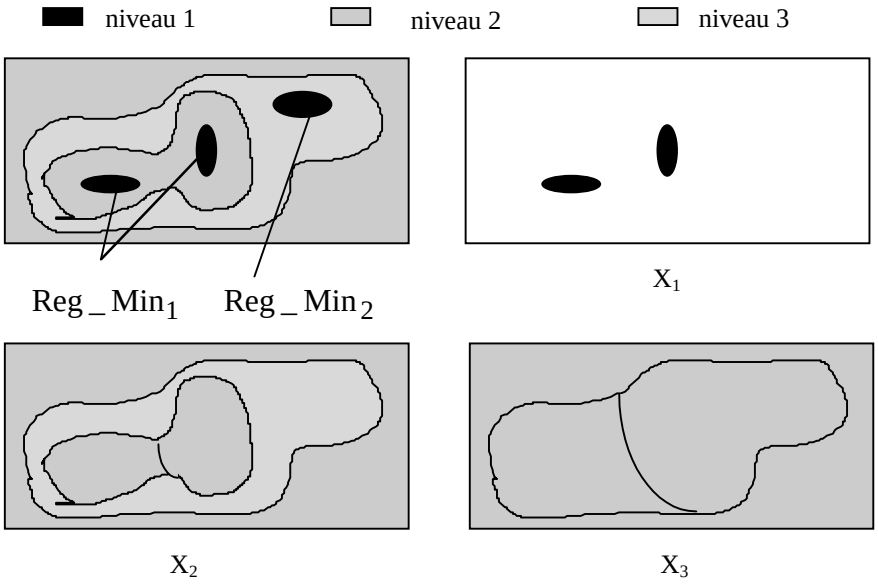


Figure 4.3.1.2. Illustration du processus d'immersion.

4.3.2. Ligne de partage des eaux d'une fonction régulière

Supposons que l'image f (fonction bidimenssionelle cette fois-ci) est

suffisamment régulière (de classe C^2) pour permettre l'application d'opérateurs différentiels. Nous allons chercher une caractérisation de la ligne de partage des eaux de f, en faisant tendre vers 0 la distance entre deux sections inférieures de f et en passant à la limite dans l'algorithme de la définition précédente. Le gradient ∇f est le vecteur plan des dérivées premiers de f et le Hessien Hf est la matrice symétrique des dérivés secondes de f. **Un point singulier** est un point en lequel le gradient de f s'annule ($\nabla f = 0$).

Nous étudions d'abord les lignes intégrales du gradient. Ce sont les lignes de plus grande pente.

Définition 4.3.2.1. Un chemin $\gamma : (-\infty, \infty) \to R^2$, de classe C^1 est appelé **ligne intégrale maximale du gradient** ou simplement **ligne maximale du gradient** si:

$$(\forall) s \in R, \frac{d\gamma}{ds}(s) = \pm \nabla f(\gamma(s)) \neq 0 \text{ et } \lim_{s \to -\infty} \frac{d\gamma}{ds} = \lim_{s \to \infty} \frac{d\gamma}{ds} = 0 \qquad (69)$$

Nous disons que la ligne maximale est **descendante** (resp. **ascendante**) si $\frac{d\gamma}{ds}(s) = -\nabla f(\gamma(s))$ (resp. $\frac{d\gamma}{ds}(s) = \nabla f(\gamma(s))$).

D'après les hypothèses de régularité faites sur f, par tout point x tel que $f(x) \neq 0$, il passe une et seulement une ligne maximale descendante. Ces lignes maximales relient deux points critiques de f et n'ont aucun point critique en leur intérieur.

Malheureusement, une ligne descendante n'aboutit pas toujours à un minimum régional. Il est donc nécessaire de recoller ces lignes pour aboutir effectivement à un minimum régional. Pour cela, nous allons munir l'ensemble des points singuliers de f d'une relation d'ordre partiel:

Définition 4.3.2.2. Soient a et b deux points singuliers de f. Nous dirons que b est **au-dessus** d'a s'il existe une ligne maximale ascendante du gradient d'a vers b. Cette relation étant antisymétrique, en prenant la fermeture transitive de cette relation, nous obtenons la relation d'ordre "**au-dessous**".

Cette relation d'ordre permet de distinguer trois sortes de points singuliers:

les minima régionaux,

les points au-dessus d'un seul minimum,

les points au-dessus de plusieurs minima.

Ces derniers devraient clairement appartenir à une définition de la ligne de partage des eaux d'une image continue (décrite par une fonction continue et non par une fonction en escalier).

Définition 4.3.2.3 Nous noterons P(f) le sous-ensemble des points singuliers a de f qui sont au-dessus de plusieurs minima régionaux.

Nous obtenons alors le théorème de convergence suivant, qui aurait pu être la définition directe de la ligne de partage des eaux d'une fonction régulière:

Théorème 4.3.2.1 Soit f une fonction C^2. Nous supposerons de plus que f n'a que des points singuliers isolés, et que, en ces points singuliers, le Hessien a deux valeurs propres non nulles. Approximons f par la suite de fonctions en escalier

$f_n(x) = \frac{E\left(2^n f(x)\right)}{2^n}$ où E(.) est la partie entière.

La limite au sens de la topologie en tout ou rien des lignes de partage des eaux de f_n, est l'ensemble des lignes maximales du gradient reliant deux points de P(f).

Sous les hypothèses du théorème, la ligne de partage des eaux est donc un graphe de type fini. Les arêtes de ce graphe sont des lignes intégrales du gradient reliant soit deux points selles (point où le Hessien a deux valeurs propres de signe contraire) soit un point selle à un maximum local. En particulier, par tout point de la ligne de partage des eaux (sauf pour les points singuliers) passe une seule ligne maximale descendante, qui se divise au niveau du point selle et non pas deux qui aboutissent à deux minima régionaux distincts.

Notons que pour définir P(f) il suffit de supposer que f a ses points critiques isolés. Cependant, la convergence de l'algorithme discret vers les lignes du gradient joignant les points de P(f) nécessite un Hessien sans valeurs propres nulles. Le graphe ligne de partage des eaux ne peut pas avoir de points terminaux. Ceci est du au fait que nous avons supposé que le Hessien ait deux valeurs propres non nulles. Sans cette hypothèse, la ligne de partage des eaux peut présenter des points terminaux. De même, les points triples ne peuvent être que des maxima régionaux. Là encore si on ne suppose pas les deux valeurs propres du Hessien différentes, les points multiples sont des points critiques, puisque par un point non critique passe une seule ligne maximale descendante du gradient.

Le théorème montre que la ligne de partage des eaux est une notion profondément globale. En effet, par tout point non critique passe une seule ligne maximale du gradient. Le seul moyen de distinguer une ligne maximale faisant partie de la ligne de partage des eaux d'une n'en faisant pas partie est d'examiner ses extrémités. Il est même illusoire de trouver un critère local, comme le montre la proposition suivante:

Proposition 4.3.2.1. Soit a un point du support de f tel que: $\nabla f(a) \neq 0$. Soit ν_a un voisinage d'a ne contenant pas de point singulier. Soit γ la restriction à ν_a de la ligne intégrale maximale du gradient passant par a. Il existe une fonction f_0, égale à f sur ν_a, telle que γ soit dans la ligne de partage des eaux de f_0.

En d'autres termes, il n'y a pas de caractérisation locale de la ligne de partage des eaux. Ceci est du à la régularité C^2 de f. Si f est moins régulière, il peut exister des critères locaux. En particulier, si f est la distance à un ensemble composé de plusieurs composantes, la ligne de partage des eaux de f est incluse dans les points de non differentiabilité de f. Cette remarque suggère une approche métrique de la ligne de partage des eaux où celui-ci serait un Skiz au sens d'une distance générale.

4.3.3. L'approche métrique

Dans le cas continu, sous des hypothèses de régularité convenables (C^2, points

singuliers isolés et Hessien ayant ses deux valeurs propres non nulles), la ligne de partage des eaux est un graphe composé de lignes intégrales du gradient. Toujours sous ces mêmes hypothèses, nous allons définir une métrique pour laquelle la ligne de partage des eaux est en fait un squelette par zones d'influence.

Définition. La **distance image** d_f d'une fonction f de classe C^1 est definie par:

$$(\forall)\ (a,b)\in \mathrm{supp}(f)\times\mathrm{supp}(f),\ d_f(a,b)=\inf_{\gamma_{ab}}\int_{\alpha}^{\beta}\|\nabla f(\gamma_{ab}(s))\|ds \qquad (70)$$

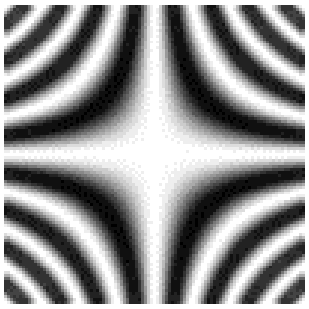
où γ_{ab} est un chemin d'a à b, parametré par son abscisse curviligne.

4.3.3.1. La ligne de partage des eaux est un Skiz

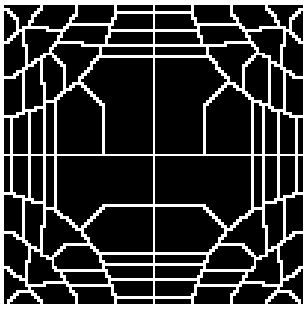
Sous nos hypothèses, d_f est alors une distance. Pour des raisons techniques, nous supposerons que f a tous ses minima au même niveau, que nous prendrons égal à 0 par convention. Une transformation permettant à f de vérifier cette hypothèse peut être effectuée sans modifier la ligne de partage des eaux de f.

Théorème L'ensemble des points à égale d_f-distance de deux minima régionaux distincts de f est l'ensemble des lignes maximales du gradient reliant deux points de P(f). Il coïncide donc avec la ligne de partage des eaux de f.

Dans la figure 4.3.3.1.1. on présente l'effet de l'application de l'opérateur de ligne de partage des eaux sur une image.



a) L'image originale



b) L'image de la ligne de partage des eaux de l'image originale.

Figure 4.3.3.1.1 L'effet de l'application de l'opérateur de ligne de partage des eaux à une image.

On peut observer l'effet de sur-segmentation de l'opérateur ligne de partage des eaux.

5. Digitalisation des opérateurs morphologiques

Une catégorie très importante d'images est celle des images digitales. Ce sont les images traitées par les systemes de transmission numérique. On obtient ce genre d'images par l'échantillonnage des images continues. Les images digitales sont des fonctions définies sur une trame, sous-ensemble de Z^2 muni de relations de voisinage.

L'image analogique est liée au plan associé à un capteur et ce plan est défini comme étant le plan de projection de la scène observée. Cette projection peut s'effectuer suivant des faisceaux parallèles ou des faisceaux coniques. Le cas le plus courant est celui de l'image optique fournie dans le plan de focalisation d'une camera ou d'un appareil photographique. Cette image est de nature analogique et correspond à une distribution d'intensités lumineuses ayant pour support un intervalle de R^2, elle est représentée par une fonction f. La représentation numérique de cette image consiste à construire à partir de f une fonction f_A définie sur un domaine dénombrable de R^2 dans lequel les éléments de représentation sont manipulables aisément par ordinateur. La fonction f_A est definie à partir de f par la relation d'intégration suivante:

$$f_A(P) = \frac{1}{S_P} \iint_{V_P} f(x, y)dxdy$$

Cette formulation est issue du modèle de numérisation défini pour un capteur qui intègre en un point P l'information contenue dans un voisinage de P et semble naturelle pour le traitement d'images en niveaux de gris.

Deux éléments sont indéterminés dans la formulation précédente: d'une part la localisation des points P, et d'autre part la spécification de leur voisinage V_P. Si on se réfère au théorème d'échantillonnage, la distribution des points P est liée à l'information variationnelle des valeurs de l'image analogique f. Cette distribution se caractérise par un critère de régularité. Par ailleurs, étant donné une distribution de points P, l'ensemble des voisinages V_P que l'on veut définir doit former une **partition** du support de la fonction image analogique f. Si on restreint le nombre de configurations possibles pour les V_P et que l'on utilise repetitivement les mêmes configurations de base pour recouvrir R^2, on parle de **pavage.** Il s'agit par conséquent de définir ce pavage, c'est à dire l'ensemble des points P et des surfaces élémentaires V_P qui leur sont associés. Si l'on n'impose aucune contrainte supplémentaire, les possibilités de définition des points P et des voisinages V_P sont infinis. Des propriétés concernant les points P et les éléments de surface V_P peuvent être énoncées, caractérisant alors différentes constructions et limitant leur nombre. Elles peuvent porter sur la disposition des points P, sur la forme et la régularité des surfaces V_P, sur les propriétés du pavage résultant. Au premier abord, deux méthodologies apparaissent pour résoudre ce problème, selon que l'on définira tout
d'abord la distribution des points P avant que chacun d'eux ne s'attribue un territoire V_P, ou que

l'on définisse a priori des modèles élémentaires V_P à partir desquels on construit une partition du plan. On verra qu'une troisième méthode consiste à générer les frontières du pavage. Dans le contexte de l'analyse d'image, les pavages qui sont retenus vérifient des propriétés tels que la repetitivité à l'infini du partitionement, les méthodes rejoignent les principes de caractérisation et de construction de mosaïques et de fresques où des tesselles de forme complexe peuvent s'emboîter à l'infini, sur le plan ou sur la surface d'un volume. Dans le cadre de la première approche, on positionne les points P avant de définir leur territoire. Les points P sont considérés comme les germes de cellules que l'on fait isotropiquement grossir en parallèle. Cette stratégie assure l'unicité du pavage, une fois les germes distribués dans le plan. La propagation est stoppée en chaque point où il y a rencontre entre deux cellules, ce qui amène ces lieux de rencontre à s'étendre progressivement en segments de droite qui définissent les arêtes des tesselles V_P ; ces tesselles sont convexes. Dans le cas où les germes sont positionnés de manière régulière, les V_P appartiennent à un ensemble fini des formes élémentaires et on peut obtenir des pavages dits réguliers.

Définition 5.1. Une trame $T = (V, E)$, est définie par la donnée d'un ensemble de points V et d'un ensemble de relations de voisinage $E \subset V \times V$. Deux points p et q de V sont voisins si $(p, q) \in E$.

Définition 5.2. On appellera **voisinage** d'un point p l'ensemble $N_E(p)$ des voisins de p.

Il y a plusieurs types de voisinages, donc plusieurs types de voisins. Pour chaque type on trouve un type correspondent de trame.

Pour éviter certains pathologies, on supposera que E possède les propriétés suivantes:

1. $(p, q) \notin E$, pour tout $p \in V$,
2. $(p, q) \in E \Rightarrow (q, p) \in E$.

Supposons dans un premier temps que l'on désire utiliser le même polygone pour toute la partition. Soit n le nombre de cotés de ce polygone, P son centre et k le nombre de polygones communs à un sommet S (conformément à la figure 5.1).

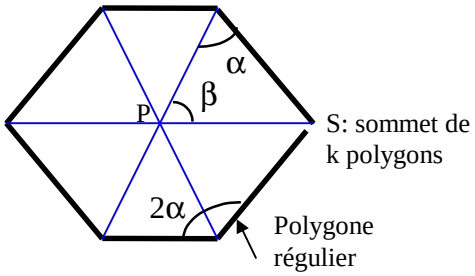


Figure 5.1. Caractéristique d'une tesselle.

L'angle ß en P limité par les deux extrémités d'une même coté du polygone est $\beta = \frac{2\pi}{n}$.

L'angle ($\theta = 2\alpha$) formé entre deux cotés adjacents du polygone en S est tel que:

$$\beta + 2\alpha = \pi$$

d'où :

$$\theta = \pi\frac{n-2}{n}$$

k polygones se rencontrent en chaque sommet, donc:

$$k\theta = 2\pi$$

d'où la relation:

$$k = \frac{2n}{n-2}$$

k et n devant être entiers et strictement supérieurs à 2 (n>2 car il représente le nombre des sommets du polygone, et k>2 car les polygones ne se rencontrent qu'en leurs sommets).

Remarquant que pour $n \geq 7$, on a:

$$\frac{2n}{n-2} < 3$$

l'équation n'admet alors que les trois solutions:
n=3, k=6, les tesselles sont des triangles,
n=4, k=4, les tesselles sont des carrées,
n=6, k=3, les tesselles sont des hexagones.
On obtient ainsi les trois partitions courantes du plan, appelées **partitions régulières** présentées dans la figure 5.2.

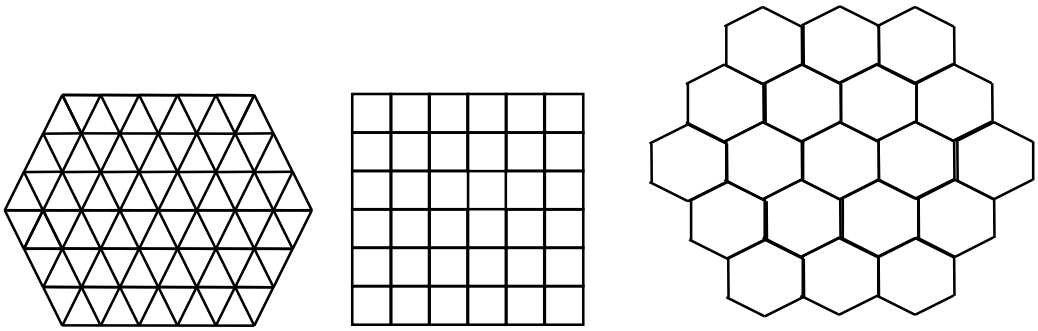
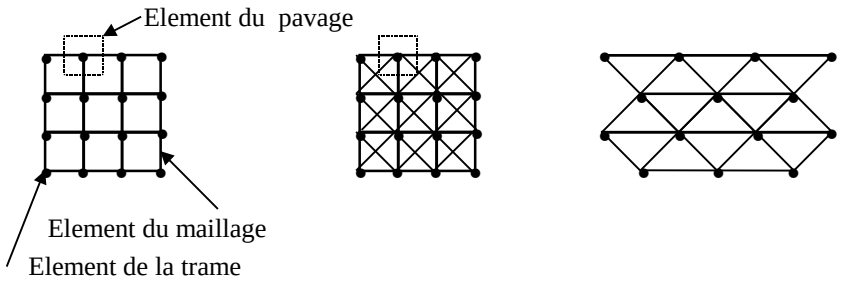


Figure 5.2. Pavages par triangles, carrées et hexagones.

Les trames correspondantes dans le plan aux pavages par carrés et par hexagones sont présentées dans la figure 5.3.



a) Trame carrée 4-connexité

b) Trame carrée 8-connexité

c) Trame hexagonale 6-connexité

Figure 5.3. Exemples de trames.

Ayant obtenu un pavage, on associe un point P à l'intérieur de chacune des tesselles V_P intervenant dans sa constitution. Les points P peuvent être les centres de gravité des V_P (nous rappellerons que nous avons restreint dans cette approche les V_P à être des polygones convexes réguliers) comme est montré dans la figure 5.2. En langage d'imagerie, les points P sont appelés pixels (picture elements).

On définit ensuite le maillage associé à un pavage:

-A tout point P est associé l'ensemble des points Q tels que V_P et V_Q ont une arrête commune. L'ensemble de tous les segments (P,Q) ainsi définis forme le maillage associé au pavage.

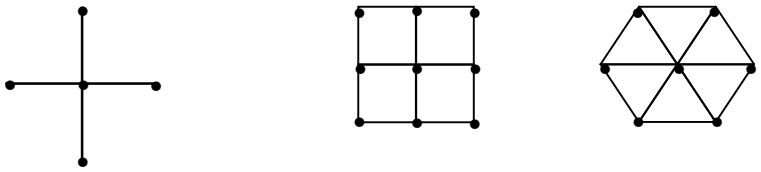
Les segments du maillage forment un nouveau pavage pour lequel les points représentatifs des tesselles sont les sommets du pavage initial. Ainsi pavage et maillage sont des représentations duales du partitionnement du plan.

On remarque que le partitionnement défini par le maillage associé au pavage triangulaire est le pavage hexagonal, que celui défini à partir du pavage carré reste carré et que celui-ci défini à partir du pavage hexagonal est triangulaire.

Chaque point intérieur de la trame présentée dans la figure 5.3.a) a 4 voisins. Il s'agit donc, d'une trame carrée 4-connexité. Dans la figure 5.3.b) est présentée une autre trame carrée. Dans ce cas-ci chaque point a 8 voisins. Voilà pourquoi on dit qu'il s'agit d'une trame carrée 8-connexité. La trame de la figure 5.1 c) est hexagonale. Chaque point a six voisins. Donc c'est une trame hexagonale 6-connexité.

On rappelle qu'un ensemble est dit connexe s'il ne peut être formé de l'union de deux ouverts disjoints, au sens de la topologie associée.

L'élément structurant unité de la trame, que nous noterons H est l'ensemble formé de l'origine et des voisins de l'origine. Voici les éléments structurants unité pour les trois types de trame.



a) Trame carrée 4-connexité | b) Trame carrée 8-connexité | c) Trame hexagonale 6-connexité

Figure 5.2. Les éléments structurants unités des trois trames couramment utilisées.

L'élément structurant de taille n sera le dilaté n fois par lui-même de l'élément structurant unité.

Malheureusement il n'est pas possible de définir une topologie convenable dans Z^2 pour tous les maillages. Les problèmes viennent pour la plupart du fait que l'une des premières étapes lors de la traduction de concepts de géométrie discrète est d'exprimer de manière cohérente le théorème de Jordan. Il est utile de rappeler dès à présent la formulation de ce théorème dans l'espace continu.

Théorème de Jordan dans R^2.

Toute courbe fermée simple (c'est-à-dire ne se recoupant par elle-même) sépare le plan en deux domaines (ensembles connexes) qui sont le domaine intérieur et le domaine extérieur de la courbe (conformément à la figure 5.4).

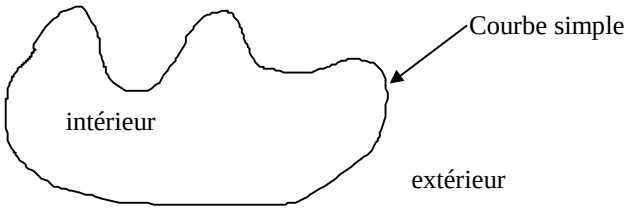


Figure 5.4. Illustration du théorème de Jordan dans R^2.

Pour énoncer le théorème de Jordan dans Z^2 il faut définir quelques notions comme: chemin ou arc digital. On utilise également pour parler de points voisins les termes de points adjacents ou points consécutifs.

On peut caractériser comme points adjacents au point P les points Q tels que V_P et V_Q ont une arête commune. Ainsi sur le maillage triangulaire P possède trois points adjacents, il en possède quatre sur le maillage carré et six sur le maillage hexagonal. On peut relier la notion de consécutivité à la notion de métrique pour obtenir des relations entre points plus larges que celles données strictement par le maillage. Ces deux notions sont si étroitement liées dans l'espace discret que l'on peut se demander laquelle apparaît en premier.

Maillage carré Tout point P est caractérisé par ses coordonnées (i,j) sur le maillage; i et j sont des entiers qui permettent aussi l'adressage de la **matrice de codage** de l'image. Les quatre points adjacents et liés à P par le maillage sont également caractérisés comme étant les points à distance 1 de P, en prenant pour distance la somme des différences des coordonnées des points en abscisse et en ordonné. On définit bien ainsi une métrique, que nous appelons d_4, par:

$$d_4(P,Q) = |i_P - i_Q| + |j_P - j_Q|$$

Cette distance est appelée en anglais **City Block Distance** (ou **Square Distance**). Les points Q distincts de P qui vérifient:

$$d_4(P,Q) \leq 1$$

sont appelés points 4-adjacents à P ou points 4-connexes à P.
On peut introduire une autre distance, notée d_8:

$$d_8(P,Q) = \max(|i_P - i_Q|, |j_P - j_Q|)$$

Cette distance est appelée en anglais **Chessboard Distance** (ou **Diamond Distance**). Les points qui ont la propriété:

$$d_8(P,Q) \leq 1$$

sont le points 8-connexes à P.

Maillage triangulaire Celui-ci associe à chaque point P, trois voisins. Donc on parle de 3-connexité. Le 9-voisinage de P est donné par son 3-voisinage auquel on ajoute les points de coordonnées: (i+1,j-1), (i+1,j+1), (i,j-2), (i-1,j-1), (i-1,j+1) sur le codage matriciel. Les six points ainsi rajoutés sont centres des tesselles qui ont seulement un sommet commune avec les tesselles associée à P, et une arête commune avec les tesselles du 3-voisinage de P. Pour le 12-voisinage, on ajoute au 9-voisinage les trois points:

(i-1,j), (i+1,j+2), (i+1, j-2) si i+j est pair,

(i+1,j), (i-1,j+2), (i-1,j-2) si i+j est impair.

La notion de points adjacents s'étend à la notion de chemin connexe. Dans le cas du maillage carré, on voit apparaître deux types de chemins, des chemins 4-connexes ou 8-connexes, conformément à la figure 5.5.

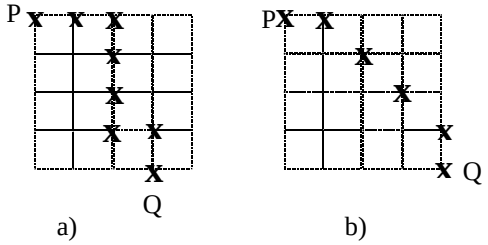


Figure 5.5. Chemins 4-connexe (a), et 8-connexe (b) sur le maillage carré.

Pour le maillage triangulaire, les chemins pourront être 3-connexes, 9-connexes ou 12-connexes. Pour le maillage hexagonal, il n'y a aucune risque d'ambiguïté, à savoir que les chemins sont 6-connexes. Soit P et Q deux points de l'image et soit S un sous-ensemble de points contenant P et Q. On dit que P et Q sont connectés dans S si et seulement s'il existe un chemin connexe inclus dans S reliant P et Q. La relation "être connecté dans S" est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive). Les composantes connexes de l'image sont égales aux classes d'équivalence de cette relation. Sur le maillage carré, en fonction de la notion de chemin connexe utilisée, on définit des composantes 4-connexes ou 8-connexes, conformément à la figure 5.6.

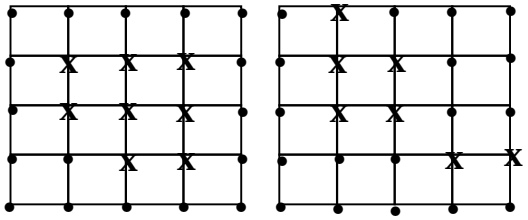


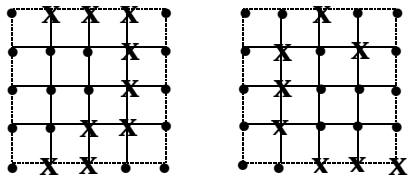
Figure 5.6. Composants 4-connexe (a), et 8-connexe (b).

La reconnaissance des composantes connexes dans une image, c'est-à-dire le mécanisme d'association entre les points qui appartient à une même composante connexe est appelée étiquetage de composantes connexes. Dans la figure 5.7 est présenté un exemple d'étiquetage:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	2	0	0
0	1	1	0	0	2	2	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Figure 5.7. Un exemple d'étiquetage des composantes 4-connexes.

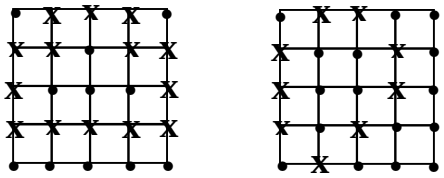
Soit S un sous-ensemble non vide de points de Σ, S est un **arc** si et seulement si S est connexe et si chacun de ses points, exceptés deux d'entre eux, possède exactement deux points adjacents dans S. Les deux points d'exception sont appelés les extrémités de l'arc S. Deux exemples sont présentés dans la figure 5.8.



a) b)

Figure 5.8. Arcs 4-connexes (a), et 8-connexes (b).

Soit S un sous-ensemble non vide de points de, S est une courbe si et seulement si S est connexe et si chacun de ses points possède exactement deux points adjacents dans S. Dans la figure 5.9. sont présentées deux exemples de courbes.



a) b)

Figure 5.9. Courbes 4-connexes (a), et 8-connexes (b).

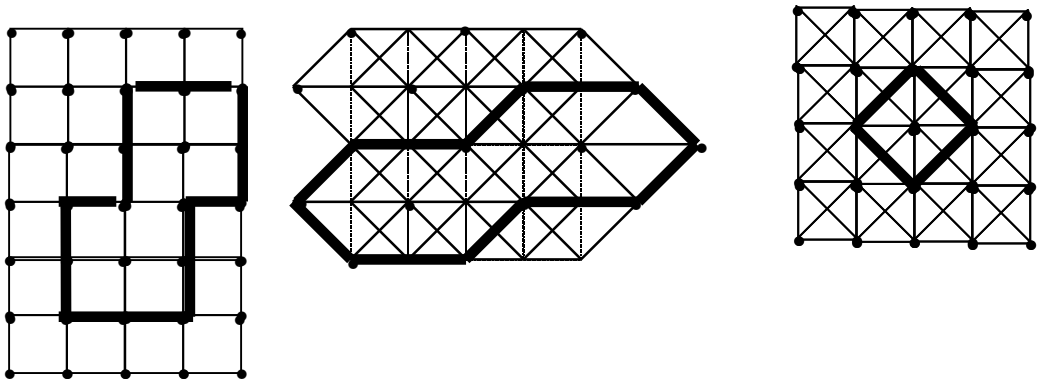
Le terme de courbe 8-connexe ne peut pas être employé à moins de quatre points et celui de courbe 4-connexe à moins de huit points.

Définition 5.3. Un **chemin digital** est une suite (ordonnée) de points voisins $(p_i)_{i=0}^{n}$. **Un arc digital** est l'ensemble des points d'un chemin digital (sans notion d'ordre).

En utilisant cette notion on peut faire une classification des trames. On utilise, à ce but, le principe de Jordan. L'énoncé de ce principe est:

Un chemin qui ne se croise pas, sépare la trame en deux composantes connexes exactement.

En utilisant la figure 5.10. on peut constater que seulement la trame hexagonale, 6-connexité respecte le principe de Jordan.



a) Trame carrée 4-connexité

b) Trame hexagonale 6-connexitée

c) Trame carrée 8-connexitée

Figure 5.3. Exemples semnificatives de chemins digitaux.

En effet les point intérieurs de la figure a) ne sont pas connexes (en 4-connexité) parce-qu'il n'existe aucun chemin connexe (en 4-connexité) à l'intérieur de la courbe. Donc l'intérieur de la courbe n'est pas un ensemble connexe et le principe de Jordan n'est pas respecté. En ce qui concerne l'image c), l'ensemble intérieur de la courbe n'est pas connexe (en 8-connexité) parce qu'il ne contienne qu'un seul point . Donc ni dans le cas de la figure c) le principe de Jordan n'est pas respecté. Seulement dans la figure b) le principe de Jordan est respecté. Parce que les points intérieurs sont connexes (en 6-connexité). Voilà pourquoi on préfère la trame hexagonale 6-connexité.

La réunion des ensembles, intérieure à la courbe constituée par le chemin digital et extérieur à cette courbe, représente le complémentaire du chemin digital. En utilisant cette observation on peut formuler le principe de Jordan pour l'espace $Z \times Z$:

Etant donné un arc de longueur finie dans le plan, son complémentaire est composé d'une seule région connexe.

On peut faire s'appliquer le principe de Jordan sur le maillage carré, aussi, si le complémentaire d'un arc ou d'une courbe 4-connexe (respectivement 8-connexe) est analyse en 8-connexite (respectivement 4-connexite). Le théorème de Jordan se formule alors de la manière suivant dans l'espace discret:

-Le complémentaire de toute courbe discrète 4-connexe (respectivement 8-connexe) est formé de deux composants 8-connexes (respectivement 4-connexes).
L'une de ces composants est l'intérieur de la courbe discrète, l'autre est l'extérieur.

5.1. Digitalisation des opérateurs

Généralement, il n'est pas possible de passer simplement de la transformation définie pour les images continues (fonctions $R^2 \to R$) à un algorithme sur une trame H. Le squelette est un bon exemple. Ce passage du continu au discret, **la digitalisation**, n'est pas bien résolu. Si nous notons D l'opérateur de digitalisation qui à partir d'un ensemble F du plan ou de l'espace associe les points de la trame qu'il contient et P l'opérateur de plongement qui à partir d'un ensemble de points de la trame fournit un ensemble continu, généralement sous forme polygonale, une transformation φ est digitalisable s'il existe une transformation φ^* travaillant sur les sous-ensembles de la trame et vérifiant :

$$\varphi^*(X) = D(\varphi(P(X))), \; X \in H$$

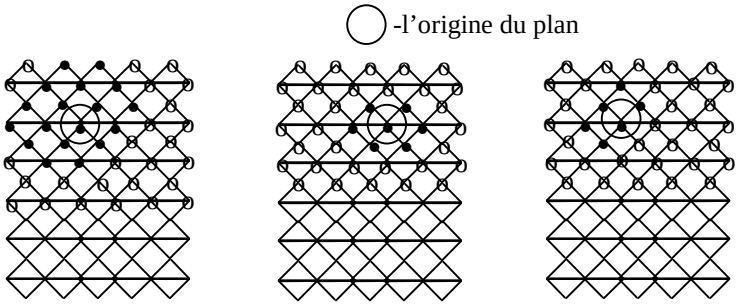
Les opérateurs tels que la dilatation ou l'ouverture sont justiciables de ce procédé. Malheureusement cette approche est inopérante pour le squelette.

5.1.1. Digitalisation des opérateurs de base

On présente, dans la suite, les définitions pour les opérateurs morphologiques digitaux de base. Les images numériques peuvent être binaires ou à plusieurs niveaux de gris. Pour les images numériques binaires, l'erodé de l'ensemble discret A par l'élément structurant discret K est la différence de Minkovski entre A et $\breve{K}$:

$$E_K\{A\} = A \div \breve{K} = \left\{x \in Z^2 \middle| K_x \subset A\right\}$$

Un exemple est présenté dans la figure 5.1.1.1.



a) L'ensemble A. b) L'ensemble K. c) L'ensemble $E_K\{A\}$.

Figure 5.1.1.1. Un exemple d'érosion discrète.

Pour les images numériques à plusieurs niveaux de gris, on appelle érosion morphologique de la fonction f_A par élément structurant g_A, la pseudo-soustraction de Minkovski de f_A par la fonction $\breve{g}_A$:

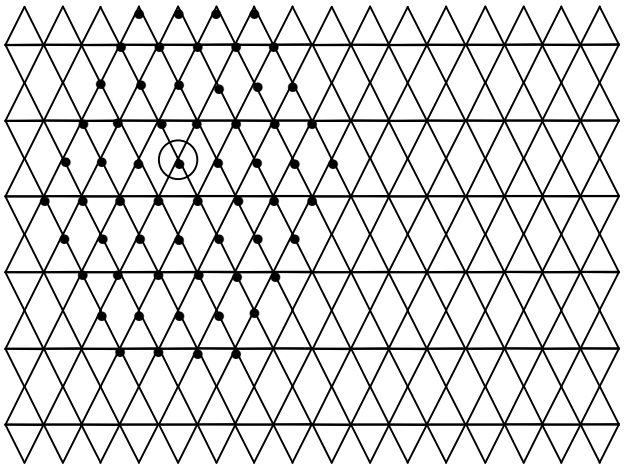
$$E_{g_A}\{f_A\}(x) = (f_A \div \breve{g}_A)(x) = \inf\left\{y \in Z^2 \middle| f(y) - g(y-x)\right\}$$

On peut introduire un opérateur d'érosion discret pour la trame carrée (et l'élément structurant carré) aussi.

Le dilaté de l'ensemble discret A par élément structurant discret K est donné par l'addition de Minkovski des ensembles A et $\breve{K}$:

$$D_K\{A\} = A \oplus \breve{K} = \left\{u \in Z^2 \middle| K_u \cap A \neq \Phi\right\}$$

En utilisant les mêmes ensembles discrets considérés dans l'exemple antérieur on obtient l'exemple de dilatation présenté dans la figure 5.1.1.2.



L'ensemble $D_K\{A\}$.

Figure 5.1.1.2. Un exemple de dilatation discrète.

Pour les images numériques à plusieurs niveaux de gris, la dilatation est définie par la relation:

$$\left(D_{g_A} f_A\right)(x) = \left(f_A \oplus \breve{g}_A\right)(x) = \sup_{y \in Z^2} \left\{f_A(y) + \breve{g}_A(x-y)\right\}$$

L'ouverture morphologique de l'objet discret A qui fait part d'une image numérique binaire à l'aide de l'élément structurant discret K est définie par la relation:

$$O_K\{A\} = A_K = \left(A \div \breve{K}\right) \oplus K$$

La fermeture morphologique de l'objet discret A, appartenant à une image numérique discrète binaire qui utilise l'élément structurant discret K est définie par la relation:

$$F_K\{A\} = A^K = \left(A \oplus \breve{K}\right) \div K$$

En utilisant les mêmes moyens de digitalisation on peut parler de chapeau-haute-de-forme discrète, ou des filtres morphologiques discrets. On présente, dans la suite, les opérateurs morphologiques de segmentation des images numériques.

5.1.2. Digitalisation des opérateurs de segmentation

Une approche digitale directe semble une solution naturelle. Le premier opérateur de segmentation qu'on a étudié est le squelette (l'axe médian). La définition de cet opérateur qu'on a donnée dans le paragraphe 4.1. est: *Le squelette de l'ensemble X est le lieu des centres des boules ouvertes maximales dans X*. Pour digitaliser cet opérateur il faut trouver la signification de la notion de boule maximale pour l'espace Z^2.

On considère une image comprenant un ensemble O des points objets; les autres points forment le fond F de l'image. Tout point d'objet peut être étiqueté par la valeur de sa distance au fond, c'est-à-dire la distance par rapport au point fond qui lui est le plus proche. On utilise une distance d, de facteur d'échelle a. Autrement dit les points de F forment l'ensemble de points de référence nécessaires à la construction de l'image de distance; les points de O qui possèdent un 4-voisin dans F sont affectés à la valeur a. Une **boule discrète** $B_d(P,R)$ de centre P est de rayon R est definie par:

$$B_d(P,R) = \{Q | d(P,Q) \le R\}$$

Sur l'image de distance, puisque chaque point P est porteur de la plus petite distance au fond, la boule discrète $B_d(P,R_P)$ centrée en P, de rayon $R_P = d(P,F) - a$, est incluse dans l'ensemble des points objets O (conformément à la figure 5.1.2.1).

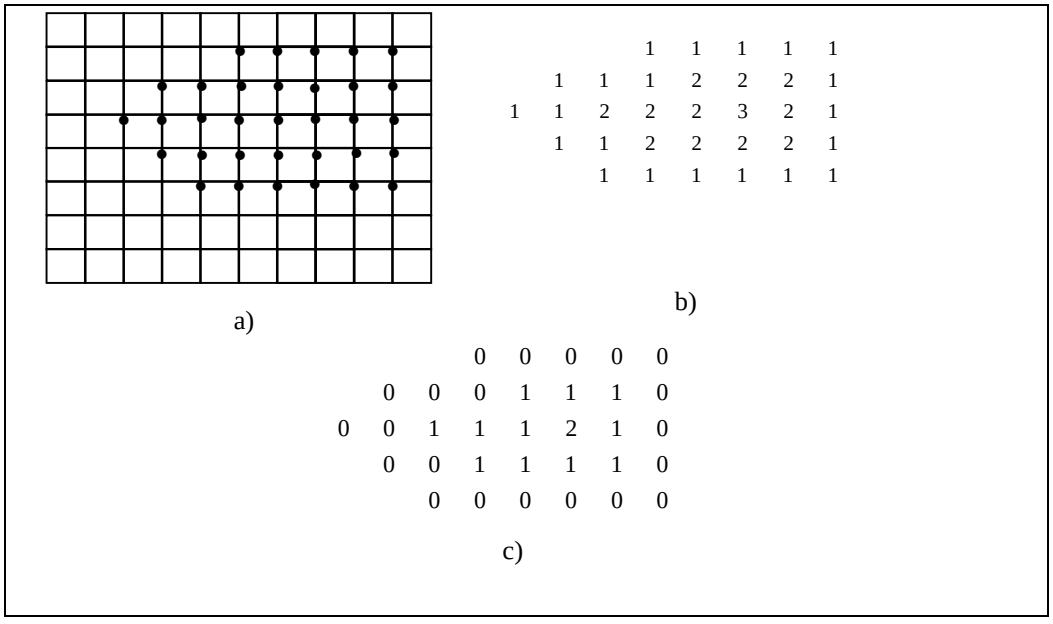


Figure 5.1.2.1. Images de distances au fond (b) et de rayons (c) pour la distance d_8, de l'image initiale (a).

Ainsi:

$$O = \bigcup_{P \in O} B_d(P, R_P)$$

parce que toute boule centrée en P contient au moins le point P. Donc l'objet O peut être reconstruit à l'aide des boules discrètes associées à la distance considérée.

$$P \in AM(O) \Leftrightarrow (\forall) Q \in O, B_d(P, R_P) \not\subset B_d(Q, R_Q)$$

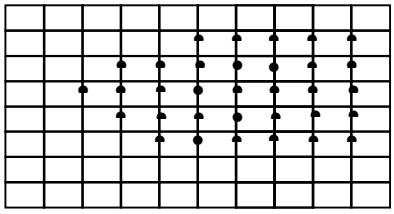
Autrement dit, tout point retenu est tel que la boule qui lui est associée n'est pas complètement incluse dans une autre boule, ces boules sont alors appelées maximales.

Puisque tout point non retenu correspond à une boule non maximale, on a:

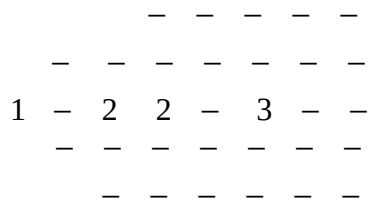
$$O = \bigcup_{P \in AM(O)} B_d(P, R_P)$$

L'ensemble des centres P des boules retenues, complété des rayons associés R_P, forme l'axe médiane AM(O) (le squelette) des objets de l'image. Le squelette de l'image de la figure 5.1.2.1 a) est présenté dans la figure 5.1.2.2 b).

Les boules discrètes associées aux points de AM(O) définissent un recouvrement de l'ensemble O, il est donc évident que l'ensemble AM(O) assure la reconstruction de O.



a) L'image initiale.



b) Le squelette de l'objet contenu dans l'image initiale.

Figure 5.1.2.2. Un exemple de squelettisation d'une image discrète.

En analysant la figure 5.1.2.2 on constate que le squelette discret n'est pas un ensemble connexe. Le squelette continu est toujours connexe. Donc le squelette discret définit généralement un ensemble de points non connexe pour un objet connexe.

Un autre problème du squelette discret est son épaisseur. Il y a certains cas d'images discrètes qui ont des squelettes d'épaisseur 2 ou plusieurs pixels. Au contraire le squelette d'une image analogique a toujours une épaisseur d'un pixel.

Finalement, on peut montrer que le squelette discret d'une image numérique n'est pas identique avec la digitalisation du squelette de l'image analogique utilisée pour l'obtention de l'image numérique considérée.

Autres questions liées de cette approche discrète du squelette sont présentées dans [Cha., Mon.'91].

Une autre approche de la digitalisation de l'opérateur squelette est basé sur la digitalisation de la formule de Lantuéjoul. Cette formule:

$$Sq(G) = \bigcup_{r>0} \bigcap_{\varepsilon>0} \left(F_r \setminus (F_r)_{B(\varepsilon)}\right)$$

a été présentée dans le paragraphe 4.1.1. Pour digitaliser cette formule il faut calculer la fonction distance au bord de l'objet, F_r et on en soustrait l'ouvert par l'élément structurant élémentaire de la trame $(F_r)_{B(\varepsilon)}$. (hexagone ou carré selon la trame utilisée). Le résultat est décevant, car il n'est pas connexe et ne ressemble pas vraiment à un graphe.

5.1.2.1. Ce que l'on demande d'un algorithme digital de squelettisation

En poussant plus loin le réflexion, les choses sont beaucoup moins claires: si nous avons une image binaire (un ensemble de pixels) quel ensemble de pixels constitue le squelette ?

Si on transforme les pixels en un polygone (carré ou hexagone), par exemple par recouvrement, un arc de squelette doit partir de chaque sommet convexe, ce qui n'est pas acceptable. Chercher à lisser ce polygone mène à une impasse, car il n'y a pas de technique universelle de lissage.

En partant à l'inverse d'une forme dans le plan continu et en prenant les pixels de la trame qu'elle contient, il n'y a pas non plus de solution. De nombreuses formes planes donnant naissance aux mêmes pixels peuvent avoir des squelettes totalement différents, du fait de la semi-continuité inférieure. Quel squelette alors nous digitaliser ?

Ceci a poussé certains auteurs à s'engager dans deux voies distinctes:

- refaire la théorie du lieu des centres des boules maximales dans un cadre digital en substituant aux boules des hexagones,

- chercher les transformations d'ensembles aboutissant à des graphes et préservant la connexité des objets.

La notion d'hexagones maximaux ne suffit pas à fournir un squelette correspondant à l'intuition. En effet, si on prend la trame dont on supprime deux points non adjacents situés sur une même ligne de la trame, l'ensemble des hexagones maximaux (qui contiennent les points supprimés) fournit un ensemble de points alignés et déconnectés, ne formant pas la médiatrice entière de deux points. Un exemple est présenté dans la figure 5.1.2.1.1.

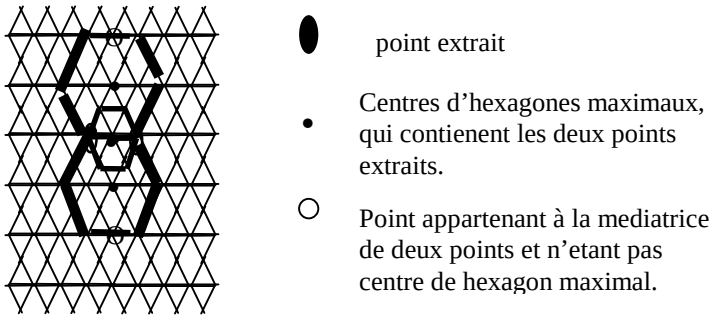

point extrait
Centres d'hexagones maximaux, qui contienent les deux points extraits.
Point appartenant à la mediatrice de deux points et n'etant pas centre de hexagon maximal.

Figure 5.1.2.1.1. Un exemple envisageant les différences entre la médiatrice d'un segment et le lieu des centres des hexagones maximaux qui passent par les extrémités du segment.

On peut observer que les centres des hexagones maximaux ne sont pas connexes. Le principe pour obtenir des squelettes connexes consiste à partir de centres d'hexagones maximaux et à remonter le long de la fonction distance selon une ligne de plus grande pente pour les connecter. En utilisant ce principe pour l'image présentée dans la figure 5.1.2.1.1, on obtient le squelette présenté dans la figure 5.1.2.1.2.

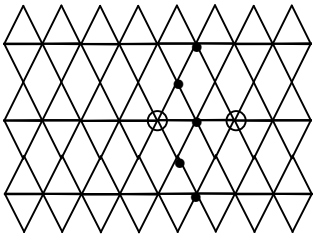


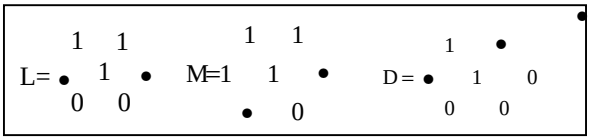
Figure 5.1.2.1.2. La construction du squelette connexe de l'image présentée dans la figure 5.1.2.1.1.

Le squelette obtenu ainsi peut avoir un épaisseur au plus deux pixels, rétraction de la forme et contenant tous les centres des hexagones maximaux inclus dans la forme.

Cependant, le passage d'un ensemble d'épaisseur deux pixels à un ensemble d'épaisseur un pixel nécessite la notion d'amincissements homotopiques que sera présentée dans la suite.

5.1.2.1.1. Amincissements

Abandonnons la notion d'hexagone maximal et étudions les transformations qui éliminent tous les points possibles sans briser localement la connexité des objets. Considérons les images digitalisées selon une trame hexagonale. Les configurations locales qui ne brisent pas la connexité sont à rotation près:

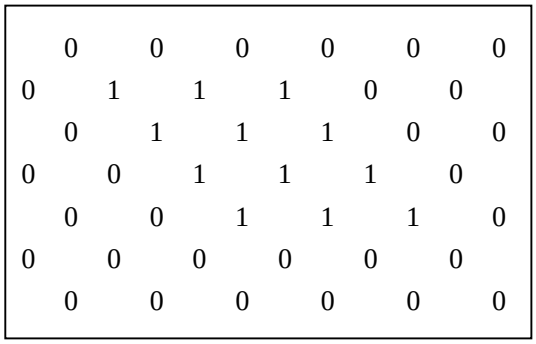


lorsque l'on remplace le pixel central par la valeur 0. •signifie que le valeur du pixel n'a pas d'importance.

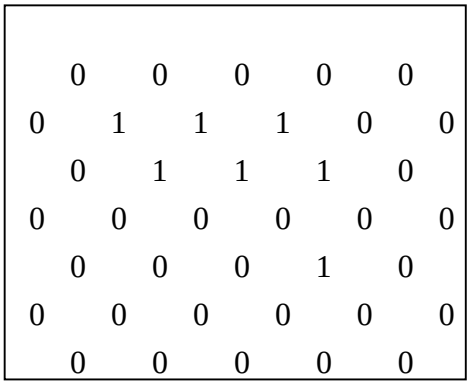
L'amincissement par L, par exemple, fonctionne ainsi:

- Pour tous les pixels de l'image en parallèle, mettre à 0 tous les pixels qui ont pour voisinage L.
- Tourner L de 60° et recommencer à amincir.

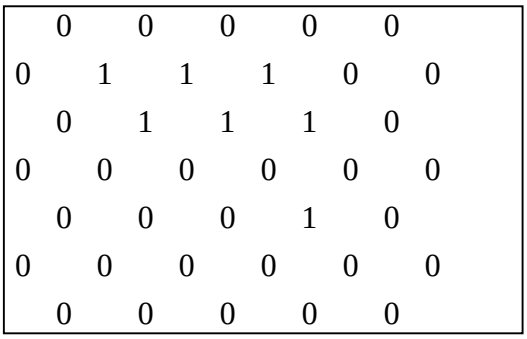
Dans la figure suivante on présente un exemple d'amincissement.



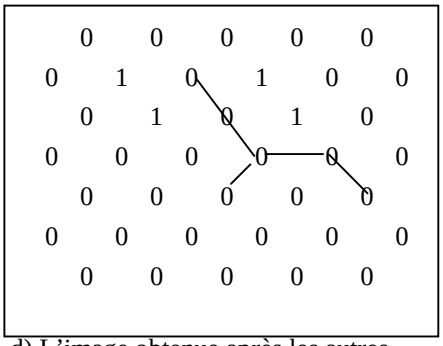
a) L'image originale et premier balayage.



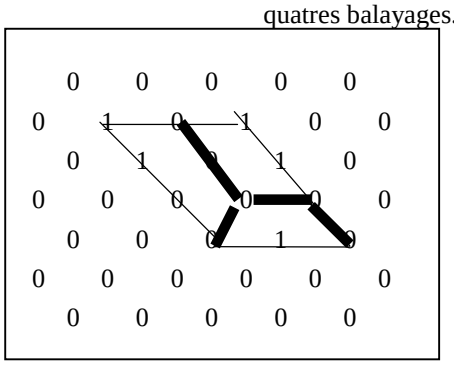
b) L'image obtenue après le premier balayage.



c) L'image obtenue après le deuxieme balayage



d) L'image obtenue après les autres quatres balayages.



e) Le contour de l'objet initial et son squelette. Cette image est obtenue en prenant le complémentaire de l'intérieur de l'image presentée dans la section c).

Figure 5.1.2.1.1.1. Un exemple d'amincissement.

Dans l'image finale, présentée dans la figure 5.1.2.1.1.1. e) on peut observer qu'à l'intérieur de l'objet initial a été obtenue la courbe marquée par une ligne plus grasse. Celle-ci est connexe et a une épaisseur égale à un pixel. Cette courbe peut être considérée comme le squelette de l'objet considéré. Cet algorithme, le premier connu et implanté est particulièrement lent: il faut balayer 6 fois l'image pour éliminer les points eliminables de la frontière de l'objet.

Notons que le fait que ces transformations préservent la connexité n'est pas à première vue évident, car les pixels sont examinés **en parallèle** à chaque étape.

Le squelette utilisé habituellement est calculé à l'aide de L. Celui obtenu par M fournit de trop nombreuses branches ou "barbules". La configuration D réduit à un point tout objet sans trou et peut donc être utilisée pour marquer de manière homotopique un objet (le transformer en un point unique).

5.1.2.1.2. Algorithmes à base de files d'attente

Le principe de ces algorithmes consiste à éliminer dans un certain ordre les pixels du bord de l'objet. Un pixel sera dit éliminable si sa suppression ne modifie pas la connexité de l'objet. Dans une première étape, les points que l'on veut voir figurer dans le squelette sont déterminés. Ce sont typiquement les maxima locaux de la fonction distance au bord. Ce points sont appelés "points d'ancrage". L'algorithme consiste alors à mettre sur une fille d'attente les pixels du contour des objets, puis à examiner dans l'ordre les pixels de la file, éliminer des objets tous ceux qui ne sont pas points d'ancrage et qui ne modifie pas la connexité. Quand un pixel est éliminé, tous ses voisins dans l'objet sont alors mis sur la fille. Quand un pixel n'est pas éliminé, le remettre sur la fille. Le processus s'arrête lorsque plus aucun pixel ne peut pas être éliminé.

5.1.2.2 La digitalisation de SKIZ

Dans le plan, les points équidistants forment la médiatrice du segment formé par ces deux points. Sur la trame hexagonale, munie de sa distance usuelle (hexagonale), il en va tout autrement: les points équidistants de deux pixels sur une même ligne de la trame s'organisent selon un segment ayant à chacune de ses deux extrémités un cône. Ce n'est donc pas un ensemble d'épaisseur unité.

Les algorithmes par files d'attente sont les plus simples pour calculer un SKIZ d'épaisseur unité ayant la bonne connexité. Ils choisissent de manière arbitraire une ligne dans le cône que nous avons décrit. Si l'on veut une ligne mieux centrée, l'aide d'une fonction distance auxiliaire est nécessaire.

5.1.2.2.1. SKIZ et diagramme de Voronoi

Nous avons montre déjà l'équivalence entre le SKIZ et la diagramme de Voronoi. Dans la suite on présentera la diagramme de Voronoi pour les images numériques. Soit:

$$S = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$$

un ensemble de n points du plan analogique R^2. On désire générer une partition du plan pour laquelle chaque élément est le sous-ensemble des points du plan qui sont plus proche d'un point de S de tous les autres points de S. C'est la région d'influence du point considéré.

Dans le cas de la métrique euclidienne, les éléments que l'on obtient sont alors des polygones construits à partir des médiatrices des segments de droite qui joignent les couples de points de S. Pour chaque point P de S, également appelé germe, la région polygonale composée des points plus proches d'un germe que de tous les autres est appelée polygone de Voronoi et notée V(P).

Propriété 1. Dans le cas de la distance euclidienne les polygones de Voronoi sont convexes.

Un exemple est présenté dans le figure 5.1.2.2.1.1.

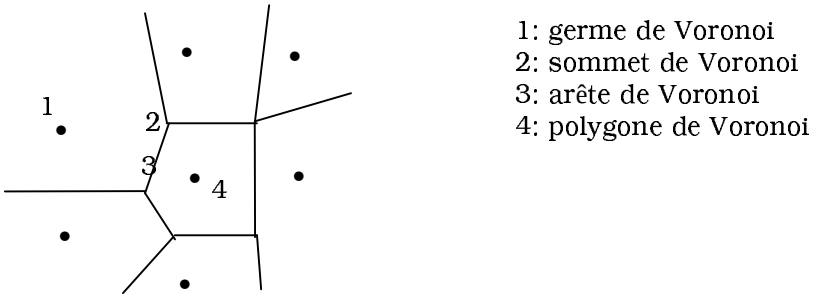


Figure 5.1.2.2.1.1 Illustration des définitions de polygone de Voronoi et de diagramme de Voronoi.

Définition. Le réseau formé des points équidistants à deux germes constitue la diagramme de Voronoi de S; il est formé de sommets (points adjacents à plus de deux sommets) et d'arêtes (portions de médiatrices).

Propriété 2. Dans le cas particulier ou il n'existe pas de quadruplait de points de S cocirculaires, tout sommet de Voronoi est centre d'un cercle passant par trois germes et ne contenant aucun autre germe. On parle de cercle de Delaunay. La triangulation obtenue en joignant les triplets de sommets est appelée triangulation de Delaunay. La dualité entre diagramme de Voronoi et triangulation de Delaunay est illustrée à la figure 5.1.2.2.1.2.

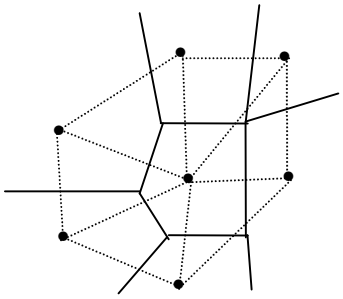


Figure 5.1.2.2.1.2 Diagramme de Voronoi et triangulation de Delaunay associée, construits à partir de germes ponctuels.

Pour la diagramme de Voronoi, on parle de graphe régulier car chaque sommet de la diagramme possède un nombre constant de sommets voisins, à savoir trois voisins (sauf dans le cas particulier de germes cocirculaires). Tout sommet de la diagramme de Voronoi plus proche du germe P_i dans l'ensemble S appartient à une arête du polygone de Voronoi associé à P_i. Le positionnement des germes dans l'image dépend, dans la pratique, du type de problème à résoudre, il peut par exemple figurer des villes sur une carte. Pour une étude du mécanisme de construction du diagramme on peut choisir une répartition aléatoire des germes dans le plan. C'est un sujet de morphologie statistique. A cette fin, on peut utiliser un processus de Poisson homogène, planer, qui constitue le moyen le plus simple pour générer des points de façon aléatoire. Un processus de Poisson est défini par les deux postulats suivants:

i) le nombre d'événements dans une région planer A, d'aire $|A|$, suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda|A|$.

ii) étant donnés n événements x_i dans une région A, les x_i sont un échantillon de la loi uniforme sur A.

5.1.2.3 La digitalisation de la l.p.e.

Nous supposerons dans cette section que nous travaillons sur une image discrète. Ce type d'image va nous permettre de définir les bassins associés à un minimum régional de manière simple. Nous noterons par p les points de la trame, par N(p) l'ensemble des voisins de p sur la trame et par l(p,q) la distance élémentaire de deux points voisins p et q. Cette procédure permet d'appréhender des distances sur la trame qui s'approchent aussi près que l'on veut de la distance euclidienne, pourvu que N(p) considère des points suffisamment éloignés de p.

5.1.2.3.1. Notion de distance topographique

Définissons à présent les lignes de plus grande pente d'une image digitale f.

Définition. La pente descendante en p, notée Desc(p) est la pente maximale avec laquelle on descend vers un voisin de p:

$$\mathrm{Desc}(p) = \max\{(f(p) - f(q)/l(p,q)), q \in N(p)\} \quad (71)$$

On défini alors un coût de déplacement le long de lignes définies sur l'image f par:

- Si $f(p) > f(q)$, $\mathrm{Cout}(p,q) = \mathrm{Desc}(p)$
- Si $f(p) < f(q)$, $\mathrm{Cout}(p,q) = \mathrm{Desc}(q)$
- Si $f(p) = f(q)$, $\mathrm{Cout}(p,q) = \frac{(\mathrm{Desc}(p) + \mathrm{Desc}(q))}{2}$

Ainsi, la dénivelée associée à un chemin $\Pi = (p_0, p_1, ...p_n)$ sera donnée par:

$$T_f(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} l(p_{i-1}, p_i)\mathrm{Cout}(p_{i-1}, p_i) \quad (72)$$

Définition. La distance topographique T_f entre deux points p et q est la dénivelée minimale des chemins d'extrémités p et q:

$$T_f(p,q) = \inf\{T_f(\Pi),\ \Pi = (p, p_1, ..., p_{n-1}, q)\} \quad (73)$$

Cette distance topographique est en fait seulement un écart: en effet, elle est positive, symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire. Cependant $T_f(p,q) = 0$ n'implique pas toujours p=q, en particulier si p et q sont intérieurs à un même plateau. Nous verrons au paragraphe suivant comment traiter ces plateaux.

Proposition. Pour tout p et q on a:

$$T_f(p,q) \geq |f(q) - f(p)| \quad (74)$$

De plus, $T_f(p,q) = f(q) - f(p)$ si et seulement si il existe un chemin $\Pi = (p, p_1, ..., p_{n-1}, q)$ tel que:

$$f(p_i) - f(p_{i-1}) = l(p_{i-1}, p_i)\mathrm{Cout}(p_{i-1}, p_i)$$

pour tout i, $0 < i \leq n$. La définition de la ligne de partage des eaux discrète suit.

Définition. Supposons que f soit minorée. Modifions la valeur de tous les minima régionaux de f en leur imposant la valeur inf(f(x)). Le bassin versant associé à un minimum régional M_i est l'ensemble de points x tel que:

$$BV(M_i) = \{x, (\forall) j \neq i, T_f(x, M_i) < T_f(x, M_j)\} \quad (75)$$

La ligne de partage des eaux discrète est le complémentaire de l'union des bassins versants.

Notons que par cette définition, la lpe n'est généralement pas un ensemble de points d'épaisseur unité. En particulier, certains bassins versants peuvent se toucher. La mise en place d'algorithmes réels partira de ces bassins versants pour en déduire une ligne d'épaisseur unité (nécessairement arbitraire) qui les séparera.

5.1.2.3.2 Le problème des plateaux

Dans la pratique, les images possèdent souvent des plateaux, points au voisinage desquels la fonction est constante. Or la distance topographique ne permet pas de les distinguer. Le principe consiste à modifier l'ordre des niveaux de gris, que nous supposerons entiers. Cette procédure permettra d'ordonner les points du plateau pour T_f , par ajout de niveaux de gris intermédiaires. Le choix classique est l'utilisation de la fonction distance au bord du plateau, soit le bord descendant, soit le bord montant. Le bord descendant(resp. le bord montant) est défini comme l'ensemble des points du plateau qui sont voisins d'un point d'altitude strictement inférieure (resp. strictement supérieure). On peut montrer que la distance au bord descendant ne crée pas de nouveaux arcs à la l.p.e. Cette particularité est surtout intéressante si l'on cherche à connecter des objets.

5.1.2.3.3. Quelques applications de la l.p.e. discrète

En utilisant la l.p.e on peut séparer les objets se recouvrant. Observons une image, représentant un ensemble d'objets qui se recouvrent partialement. Comment découper les amas des objets, correspondant aux composantes connexes de l'image originale, pour que chaque composante connexe de l'image résultat corresponde à un seul
objet ? Pour cela nous allons d'abord transformer l'image binaire en une image numérique ou les lignes de crête sont précisément les séparations désirées. Lorsque l'on érode X progressivement avec l'élément structurant unité H (carré ou hexagone), les différents objets ont tendance à se séparer au niveau des étranglements. L'image transformée (par les érosions) représente l'inverse de la fonction distance, -d(x, C(X)). Les minima régionaux de cette fonction sont les érodés ultimes de X (les composantes connexes de $X \div nH$ qui disparaissent par érosion de taille n+1). La séparation d'objets est réalisée à l'aide de la ligne de partage des eaux. En effet la ligne de partage des eaux de la fonction -d(x,C(X)) est une image où toutes les objets de l'image X sont séparés.

La principale application de la l.p.e. est la segmentation. Dans la suite on présente quelques considérations sur la segmentation numérique.

Le premier principe est de construire l'image adéquate sur laquelle sera appliquée la l.p.e. Classiquement, elles seront de trois types:

- module de gradient morphologique $(f \oplus H - f \div H)$ ou autre gradient,
- chapeau haut-de-forme $f - f_H$, permettant de mettre en évidence les structures linéaires claires,
- l'image originale.

Apres on calcule la l.p.e. Souvent, l'effet de cette procédure est une sur-segmentation (l'image obtenue contienne beaucoup sous-regions, elle est trop détaillée). Il est donc nécessaire de mettre en place des procédures permettant d'éliminer certains minima régionaux. Il y a deux variantes de l.p.e. destinées à ce but: la l.p.e. contrainte par des marquers et la l.p.e. contrainte par le contraste. Ces opérateurs sont présentés dans [Sch., Mat.'94].

Bibliographie

[Ast., Kos., Neu.'92] J. Astola, L. Koskonen, Y. Neuvo. Statistical Properties of Discrete Morphological Filters. In Mathematical Morphology in Image Processing, ed. E. R. Dougherty, Chapter 3, pp. 93-120.

[Beu., Mey.'92] S. Beucher, F. Meyer. The Morphological Approach to Segmentation: The Watershed Transformation. In Mathematical Morphology in Image Processing, ed. E. R. Dougherty, Chapter 12, pp. 433-481.

[Boi., Gei.'92] J. D. Boissonat, B. Geiger. Three Dimensional Reconstruction of Complex Shapes based on the Delaunay Triangulation. Rapport de recherche INRIA, no. 1697, 1992.

[Boi., Sha.,Tag., Yoi.'95] J. D. Boissonat, M. Sharir, B. Taganski, M. Yoinec. Voronoi Diagrams in Higher Dimensions under Certain Polyhedral Distance Functions. Rapport INRIA, no. 2629, 1995.

[Bre., Gil., Kir., Wer.'95] H. Breu, J. Gil, D. Kirkpatrik, M. Werman. Linear Time Euclidean Distance Transform Algorithms. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Inteligence, vol. 17, no.5, May, 1995, pp.529-533.

[Cam., Cre., Gla., Rak.'95] F. Campillo, F. Cereu, F. L. Gland, R. Rakotozofy. Particle and Cell Aproximations for Nonlinear Filtering. Rapport INRIA, no. 2567, Juin 1995.

[Cha., Mon.'91] J. M. Chasseray, A. Montavert. Géométrie discrète en analyse d'images. Hermès, Paris, 1991.

[Cho.'92] G. Choquet. Cours de topologie. Masson 1992.

[Dob., Vic., Gab.'94] B.P. Dobrin, T. Viero, M. Gabbouj. Fast Watershed Algorithms: Analysis and Extensions. SPIE vol. 2180, Nonlinear Image Processing V, 1994, pp.209-220.

[Mog., Vic., Dob.'94] A.N. Moga, T. Viero, B. P. Dobrin, M. Gabbouj. Implementation of a Distributed Watershed Algorithm. In Mathematical Morphology and its applications to Image Processing, Eds. Jean Serra et Pierre Soile, Kluwer Academic, 1994, pp. 281-288.

[Naj., Sch.'93] L. Najman, M. Schmitt. Watershed of a continuous function. Signal processing 38, 1994, pp. 99-112.

[Ogn., Kub.' 95] R.L. Ogniewicz, O. Kubler. Voronoi Tessellation of Points with Integer Coordinates: Time-Efficient Implementation and Online Edge-List Generation. Pattern Recognition, vol. 28, no.12, pp.1839-1844, 1995.

[Orb., Ben., Nor.'93] C. L. Orbert, E. W. Bengtsson, B. G. Nordin. Watershed Segmentation of Binary Images using Distance Transformations. SPIE vol. 1902, Nonlinear Image Processing IV, 1993, pp.156-170.

[Pre.'87] F. Preteux. Description et interpretation des images par la morphologie mathematique. Application a l'imagerie médicale. Thèse de doctorat es sciences mathématiques. Université Paris VI, 1987.

[Pre.'92] F. Preteux. On a distance function approach for gray-level mathematical morphology. In Mathematical Morphology in Image Processing, ed. E. R. Dougherty, Chapter 10, pp. 323-349.

[Pre.'95] F. Preteux. La morphologie mathématique. Ses fondements: ensembliste, topologique, probabiliste. Cours fournit au département Signal et Image, INT-Evry, 1995.

[Roe.'92] J.B.T.M. Roendink. Mathematical morphology with Noncommutative Symetry Groups. In Mathematical Morphology in Image Processing, ed. E. R. Dougherty, Chapter 7, pp. 205-254.

[Rou., Pre.'91] N. Rougon, F. Preteux. Deformable Markers: Mathematical morphology for active contour models control, SPIE vol. 1568, image Algebra and Morphological Image Processing II, 1991, pp. 78-89.

[Rus.'95] J. C. Russ. Improvments in watershed segmentation with a smoothed Euclidean distance map. Journal of computer-assisted microscopy, vol.7, no.1, 1995.

[Seq., Pre.'96] R. E. Sequiera, F. Preteux. Dynamic Algorithm for Constructing Discrete Voronoi Diagrams. SPIE Proceedings, vol. 2662, Nonlinear Image Processing VII, 1996.

[Sch., Mat.'94] M. Schmitt, J. Mattioli. Morphologie mathématique, Masson, Paris, 1994.

[Vim., Soi.'91] L. Vincent, P. Soille. Watersheds in digital spaces: an efficient algorithm based on immersion simulatons. IEE Transactions on PAMI, vol. 13, no.6, June 1991, pp.583-598.